

BIFURCACIONES HOMOCLÍNICAS EN EL CIRCUITO DE CHUA

TRABAJO DE TESIS DE
MAESTRIA EN FISICA DE
SANDRA KAHAN

DIRECTOR DE TESIS
DR. ANIBAL C. SICARDI-SCHIFINO

INDICE.

CAPITULO 1.....	4
INTRODUCCION.....	4
PRESENTACION.....	5
CAPITULO 2.....	6
BIFURCACIONES GLOBALES.....	6
2.1 DESCRIPCION.....	6
2.2. NACIMIENTO DEL DOBLE SCROLL.....	11
CAPITULO 3.....	15
MAPA UNIDIMENSIONAL.....	15
3.1.DEFINICION.....	15
3.2 EJEMPLOS.....	17
3.3 EJEMPLOS NOTABLES.....	20
CAPITULO 4.....	22
ORBITA HOMOCLINICA PRINCIPAL.....	22
4.1 CONDICIONES RESONANTES.....	22
4.2 MAPA UNIDIMENSIONAL DE LA HOMOCLINICA PRINCIPAL.....	24
4.3 ORBITAS PERIODICAS PRINCIPALES.....	24
CAPITULO 5.....	27
ATRACTOR DE RÖSSLER.....	27
5.1 CAMBIOS EN LA DINAMICA.....	27
5.1.1 DESCRIPCION.....	27
5.1.2 ESTUDIO CUANTITATIVO.....	29
5.2 TORNILLO DE RÖSSLER EN EL CIRCUITO DE CHUA.....	32
5.2 TORNILLO DE RÖSSLER EN EL CIRCUITO DE CHUA.....	32
5.3 GENERALIZACIÓN.....	33
5.3 GENERALIZACIÓN.....	33
CAPITULO 6.....	34
ORBITAS HOMOCLÍNICAS EN EL DOBLE SCROLL.....	34
6.1. HOMOCLINICAS SECUNDARIAS.....	34
6.1.1 CASCADA DE DUPLICACION DE PERIODO.....	35
6.1.2 OTRAS ORBITAS HOMOCLÍNICAS SECUNDARIAS.....	36
6.1.3 ORBITAS HOMOCLINICAS SECUNDARIAS 3-H.....	37
6.2. SIMULACION DEL MAPA UNIDIMENSIONAL.....	41
6.2.1. ORBITAS HOMOCLINICAS 3-H Y SUS CICLOS LIMITES.....	42
6.3 CAMBIOS EN LA DINAMICA.....	44
6.3 CAMBIOS EN LA DINAMICA.....	44
6.3.1 CAMBIOS EN EL ATRACTOR DE RÖSSLER.....	44
6.3.2. CAMBIOS EN EL ATRACTOR DE CHUA.....	48
6.4 ORBITAS HOMOCLINICAS EN EL ATRACTOR DE CHUA.....	50
CAPITULO 7.....	51
CONCLUSIONES.....	51
APENDICE I.....	53
SISTEMAS DINAMICOS [25,26,27].....	53
I.1 DEFINICIONES.....	53
I.2 MAPAS.....	54
I.2.1 MAPA DE POINCARÉ.....	55
I.3 VARIEDAD CENTRAL.....	56
I.4 BIFURCACIONES LOCALES EN FLUJOS.....	56
I.4.1 BIFURCACION NODO-SILLA.....	57
I.4.2 BIFURCACION DE INTERCAMBIO.....	57
I.4.3 BIFURCACION DE HORQUILLA.....	57
I.4.4 BIFURCACION DE HOPF.....	58
I.5 BIFURCACIONES EN MAPAS.....	58
I.5.1 DUPLICACIONES DE PERIODO.....	60
APENDICE II.....	63
EL CIRCUITO DE CHUA.....	63

II.1. ECUACIONES.....	64
II.2. BIFURCACIONES LOCALES.	66
II.2.1. ANÁLISIS PARA P_0	66
II.2.2. ANÁLISIS PARA $P_{\pm}$	67
APENDICE III.....	69
ESTUDIO CUANTITATIVO DEL ATRACTOR DE CHUA [9].	69
III.1. CAMBIO DE VARIABLE.....	69
III.2 MAPA DE MEDIO RETORNO EN EL PLANO V_0	70
III.3. MAPA DE MEDIO RETORNO EN EL PLANO V_1	71
III.3 MAPA DE CONEXION Y MAPA DE POINCARE.	74
APENDICE IV.	76
BIFURCACIONES HOMOCLÍNICAS [4,19,25].	76
IV.1. HOMOCLÍNICAS DE SHILNICOV.....	76
IV.1.1. DEFINICIÓN DE UN MAPA LINEAL.....	77
IV.1.2. PUNTOS FIJOS DEL MAPA.	78
IV.1.3.ANÁLISIS DE ESTABILIDAD.....	78
IV.2. OTROS CASOS DE INTERES.....	81
BIBLIOGRAFIA.	83

CAPITULO 1. INTRODUCCION.

En los últimos cinco años, se han publicado en la literatura técnica especializada, un gran número de insipientes aplicaciones tecnológicas a ser implementadas con diferentes tipos de circuitos caóticos, en especial en el área de las comunicaciones y control. El Circuito de Chua [1] es uno de los más estudiados en ese aspecto.

L.M.Pecora y T.L.Carroll [11] determinan las condiciones necesarias y suficientes para que dos sistemas caóticos puedan ser sincronizados. Sus trabajos son retomados por otros autores [12] [13], con el fin de elaborar sencillos sistemas de transmisión de información digital, usando señales caóticas como portadoras. El Circuito de Chua, en estos casos interviene como transmisor y el receptor tiene un elemento no lineal con características similares a las del transmisor, para extraer la señal digital que se ha transmitido, mezclada con la señal caótica.

E.J.Altmann [14] por su parte, utiliza un arreglo de 8×8 Circuitos de Chua para reconocer gestos de la mano (aquellos que tienen que ver con el movimiento en el lenguaje de signos americano). En esta aplicación, las variables del Circuito de Chua están directamente relacionadas con las coordenadas espaciales de la posición de la mano. Cada circuito se rota alrededor de un eje horizontal o vertical, de modo tal que cada una de sus variedades centrales [15], estén alineadas con una parte de la trayectoria a reconocer. El arreglo es usado para generar un patrón espacial que representa cuánto se aparta cada uno de los circuitos de su variedad central, cuando se agrega en una de las ecuaciones una función dependiente del tiempo, que simula los apartamientos propios de una mano real.

X.J.Rodet [16] sustituye el oscilador LC₂ del circuito de la figura II.1a, por una línea de transmisión con el fin de simular la caja de resonancia de diferentes instrumentos musicales (clarinetes, flautas, instrumentos de cuerda, etc.). El Circuito de Chua con retardo, le permite simular diferentes sonidos y podría aplicarse a la sintetización de instrumentos.

En este trabajo nos proponemos estudiar los fenómenos críticos del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales adimensionado, el cual explica el comportamiento de las variables eléctricas del Circuito de Chua:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(y - h(x)) \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z \\ \frac{dz}{dt} = -b y \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} bx + a - b & x \geq 1 \\ ax & |x| \leq 1 \\ bx - a + b & x \leq -1 \end{cases} \quad (1.1)$$

En el apéndice II se describe el circuito y su relación con este sistema. Aquí simplemente señalaremos que el sistema (1.1) es simétrico en el espacio (x,y,z) y tiene una ecuación de transferencia h(x) lineal a trazos, por lo que presenta discontinuidades en sus derivadas en los planos x = ±1, los cuales definen tres regiones en el espacio, como muestra la figura 1.1:

D₁ (por encima del plano x = 1)

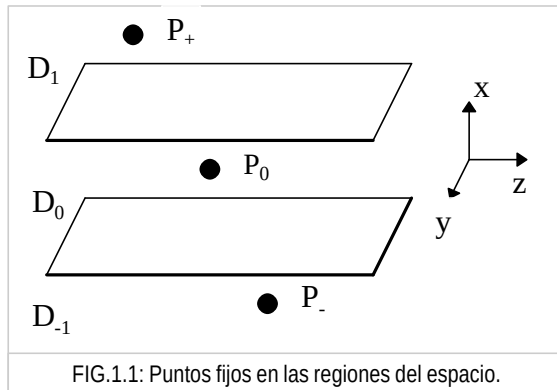
D₀ (entre los planos x = ±1)

D₋₁ (por debajo del plano x = -1)

Entonces, la dinámica del sistema está gobernada por tres puntos fijos en estas diferentes zonas ¹:

$$\begin{aligned} P_+ &= (k, 0, -k) \in D_1 \\ P_0 &= (0, 0, 0) \in D_0 \\ P_- &= (-k, 0, k) \in D_{-1} \end{aligned} \quad (1.2)$$

¹ Donde $k = \frac{b-a}{b} = 1,5$ si $a = -1/7$ y $b = 2/7$



La linealidad a trazos en la curva de tranferencia, le confiere un comportamiento topológicamente equivalente al de un sistema de ecuaciones no lineal, por lo que el circuito tiene una variada galería de atractores extraños, estructuralmente inestables [2]². Si bien estos atractores no son observables, dado que una pequeña variación en las condiciones iniciales, genera grandes cambios en la dinámica del sistema, nos proponemos echar luz sobre la estructura que soporta a los atractores que pueden observarse experimental o computacionalmente.

En especial, trabajamos en una región de los parámetros α y β (dejando los parámetros a y b constantes) en la que es observable el Atractor de Rössler [3] (muy estudiado en la literatura, pero en relación a otros sistemas de ecuaciones [4] [5] [6]) y el Atractor de Chua, también llamado Atractor Doble Scroll. Es, en especial, este atractor, el objetivo de este trabajo, ya que en la literatura se han comunicado muchos datos numéricos (computacionales [7] [8] [9] y experimentales [10]), los cuales pretendemos enmarcar en una estructura más compleja, controlada por diferentes bifurcaciones globales. Para ello, nos concentramos especialmente, en la explicación de un fenómeno llamado Nacimiento del Doble Scroll [9]: el sistema, que presentaba una dinámica asimétrica (con flujos visitando las regiones D_1 y D_0 ó las regiones D_{-1} y D_0), comienza a presentar una dinámica simétrica que involucra el pasaje de flujo por las tres regiones del espacio (x,y,z) .

PRESENTACION.

En el apéndice I se menciona algunas definiciones y propiedades de interés, comunes a muchos sistemas que presentan atractores extraños.

En el apéndice II se desarrolla el análisis del circuito y de los puntos fijos de las ecuaciones que lo describen. Y se detallan, además, las bifurcaciones locales de estos puntos fijos y los diferentes comportamientos que presentan sus autovalores.

En el capítulo 2 se describen las bifurcaciones globales que sufre el sistema, detallando, especialmente, la dinámica del principal atractor: Doble Scroll. En el apéndice III se encara la descripción de esta dinámica, en forma analítica a través de la definición de un mapa de Poincaré.

En el capítulo 3 se define un mapa unidimensional, que se utilizará en la determinación de los diferentes cambios de la dinámica que sufre el sistema.

En el capítulo 4 se determina cuáles son las posibles órbitas homoclínicas que presenta el sistema (1.1) y se detalla el estudio de la órbita homoclínica principal y sus bifurcaciones. En el apéndice IV, se explican las herramientas que permiten este estudio.

En el capítulo 5 se presenta un análisis detallado de la estructura del Atractor de Rössler, en el Circuito de Chua: sus órbitas periódicas y homoclínicas.

En el capítulo 6 presentamos una serie de resultados computacionales que muestran la existencia de diferentes órbitas homoclínicas en el Atractor de Chua. Dichas órbitas homoclínicas y sus bifurcaciones explican los distintos cambios en la dinámica del atractor y muestran una estructura que involucra la existencia de órbitas heteroclínicas en el Atractor de Chua.

En el capítulo 7 presentamos las conclusiones del trabajo, aventurando una hipótesis que permite la explicación del Nacimiento del Doble Scroll.

² En el apéndice I, se explica en forma sintética los fenómenos más sencillos, propios de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal y cuáles son las herramientas, con las que se suelen analizar esos fenómenos.

CAPITULO 2. BIFURCACIONES GLOBALES.

El principal tema de estudio de este trabajo es la explicación del Nacimiento del Doble Scroll, a partir de dos atractores asimétricos. La explicación de cuál es el cambio global que sufre el flujo en ese caso, se estudia en la sección 2.2. Sin embargo, como introducción al tema, en la próxima sección, haremos una descripción informal de cómo evoluciona el sistema (1.1), al variar uno de sus parámetros. Esto permitirá comprender que la dinámica, inicialmente, puede ser descrita por un mapa de características similares al mapa logístico (ver apéndice I), pues presenta los mismos fenómenos críticos. Pero más allá de un valor crítico del parámetro, podrán observarse otros atractores (el Atractor de Rössler y el Doble Scroll, órbitas cerradas, etc.) que ilustraremos computacionalmente, en el plano (y,x) .

2.1 DESCRIPCION.

Nos proponemos describir algunos de los atractores que pueden observarse en el sistema (1.1), para diferentes valores del parámetro a , si mantenemos el valor del parámetro b fijo. Trabajaremos con valores de parámetros para los cuales los autovalores de la matriz jacobiana, evaluada en el punto P_0 (ver apéndice II), son de la forma:

$$l_0 > 0 \quad l_{1,2} = s_0 \pm iw_0 \quad / \quad s_0 < 0 \quad (2.1)$$

En la figura 2.1 se muestra en forma muy esquemática algunos de los atractores que describiremos y en la figura 2.2 (de la siguiente página) se observan resultados computacionales que ilustran la existencia de dichos atractores.

Inicialmente (fig.2.1a) (para $a < 8.1$) el punto P_0 es de tipo silla-foco (como indica la

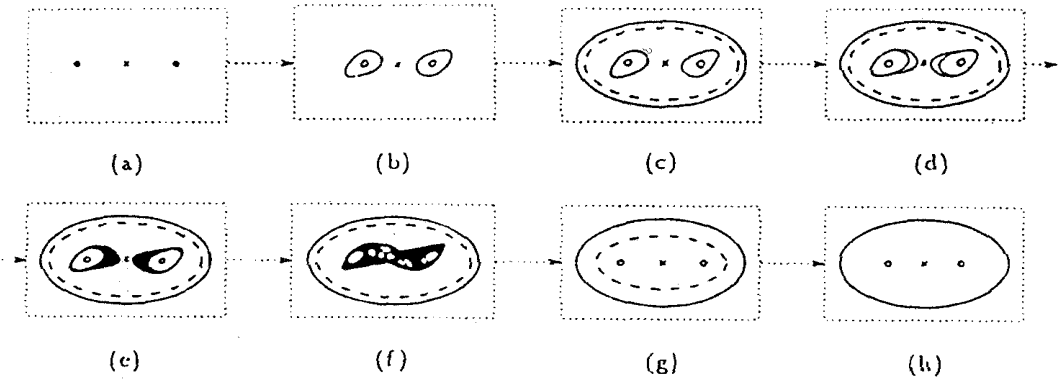
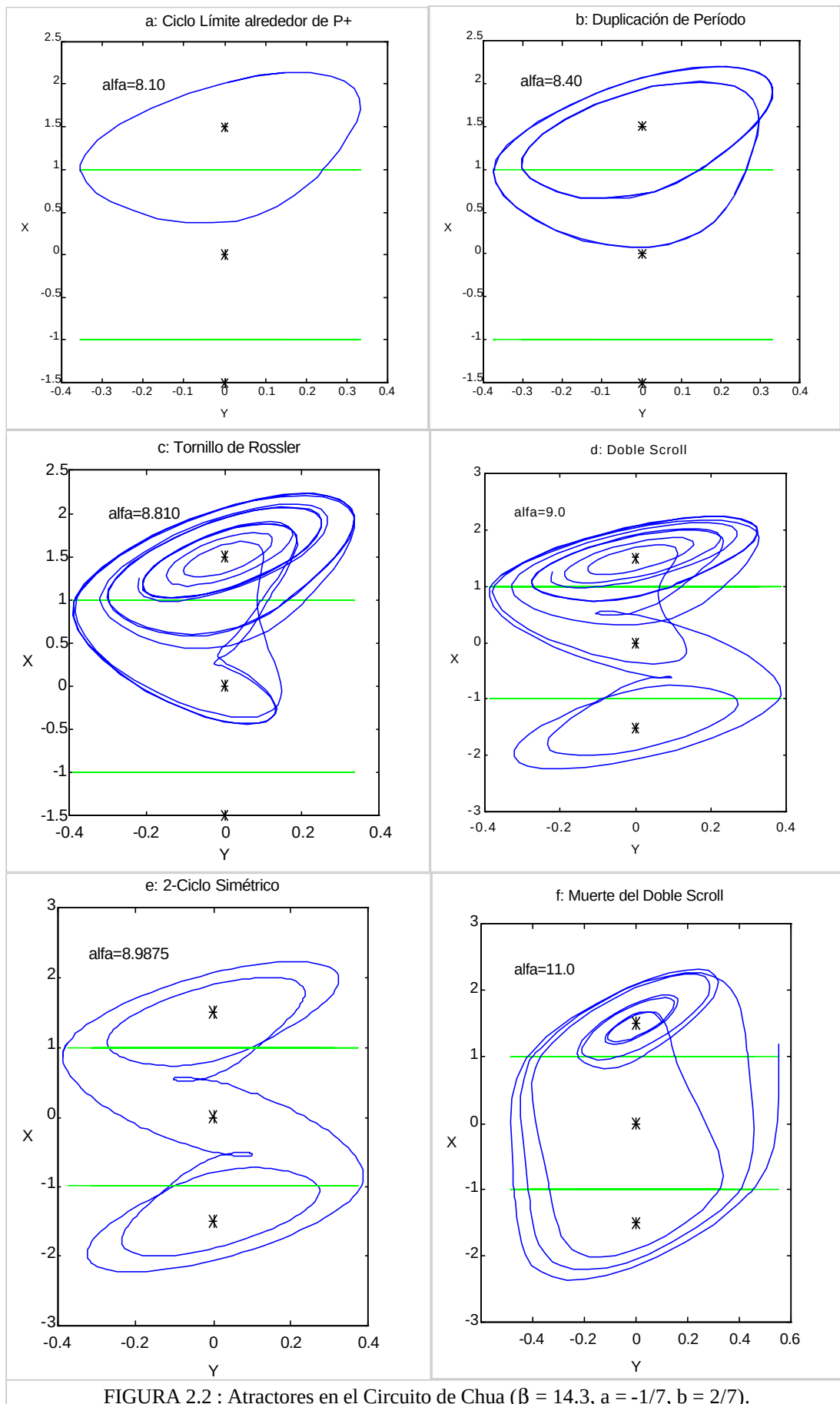
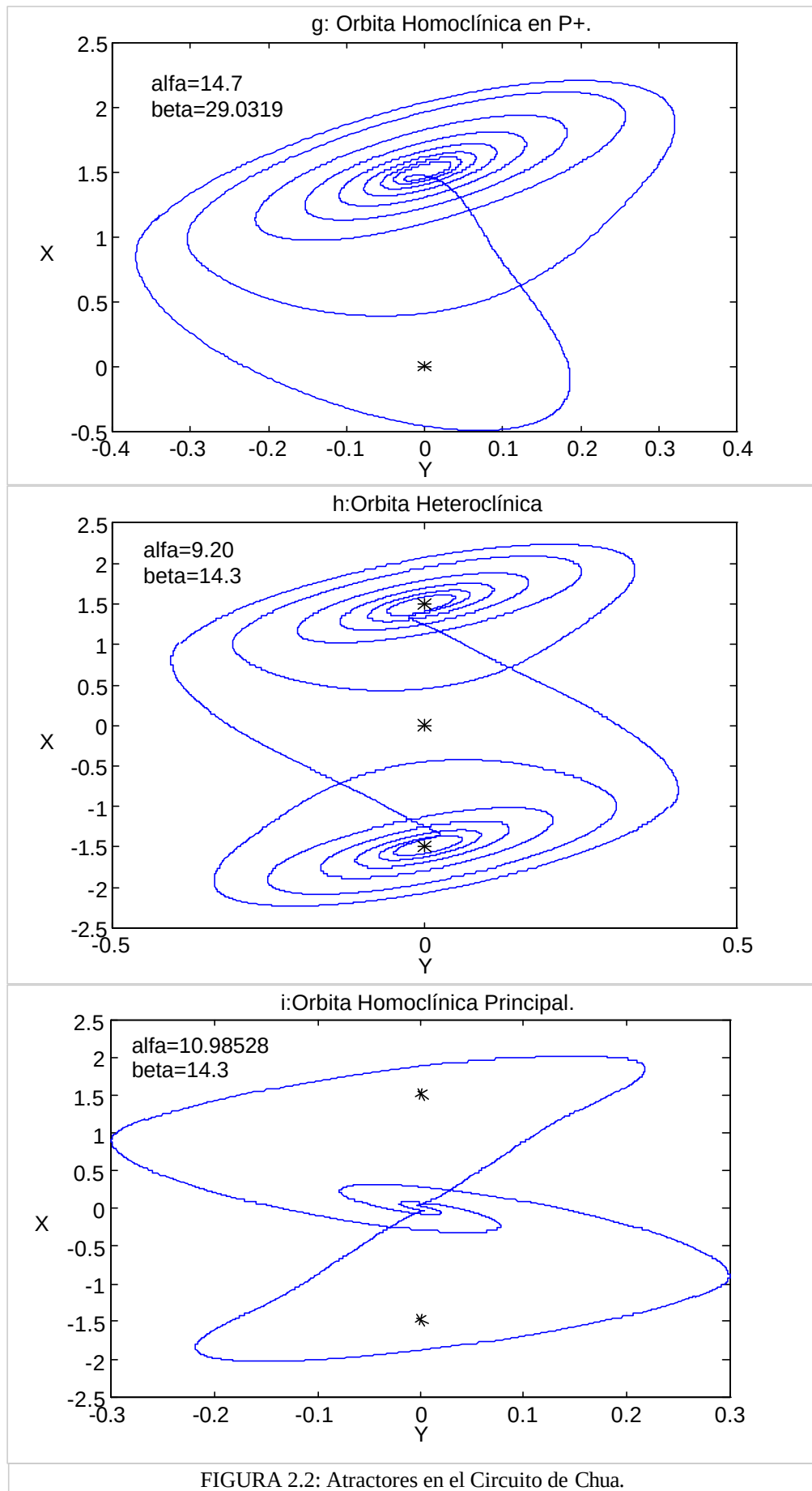


FIG. 2.1: Esquema de las bifurcaciones globales para el Circuito de Chua con: $\beta = 14.3$. Las líneas punteadas indican órbitas periódicas tipo silla mientras las líneas continuas son órbitas periódicas estables o totalmente inestables [8].

ecuación (2.1)) y los puntos $P_{\pm}$ son focos estables. El pasaje de (2.1a) a (2.1b), se debe a una bifurcación de Hopf de estos puntos (descrita en el apéndice II), con el consecuente surgimiento de un ciclo límite estable alrededor de ellos. El sistema, en este caso, tiene un comportamiento asimétrico o especular: según la condición inicial, se observará uno u otro atractor (fig.2.2a).





Si seguimos aumentando α surge una bifurcación global silla-nodo, con el consecuente surgimiento de una órbita simétrica inestable y una órbita simétrica tipo silla³ (fig.2.1c), las cuales se estudiarán en el capítulo 4. En el sistema, entonces, coexisten dos atractores asimétricos (las órbitas periódicas que surgieron en la bifurcación de Hopf) y un repelente simétrico (la órbita periódica inestable que “rodea” a aquellos atractores).

Luego, (pasaje de (2.1c) a (2.1d)) se produce una bifurcación de duplicación de período, en las órbitas periódicas asimétricas (fig.2.2b) y de (2.1d) a (2.1e) se observa una cascada directa de sucesivas duplicaciones de períodos. También pueden observarse, la existencia de una cascada inversa y la aparición de ventanas de periodicidad para ciclos de período impar (ver apéndice I). Este atractor se conoce como Atractor de Rössler tipo espiral.

Luego de un breve pasaje por el Atractor de Rössler tipo tornillo (fig.2.2c) (que se detallará en el capítulo 5), se produce el Nacimiento del Doble Scroll, producto de un aglutinamiento de los dos tornillos de Rössler, el cual se observa en la figura 2.1f y en la figura 2.2d.

Si bien la descripción del surgimiento del Atractor de Chua se hará en la próxima sección, adelantamos que entre (2.1e) y (2.1f) pueden observarse órbitas periódicas simétricas, que dan 2,3,4,... vueltas alrededor de los puntos P_+ y P_- (fig.2.2e), órbitas homoclínicas⁴ alrededor de los puntos $P_{\pm}$ (fig.2.2g) y órbitas heteroclínicas⁵ (fig.2.2h) entre el punto P_+ y P_- , las cuales se estudiarán en el capítulo 6.

A medida que α aumenta, el Doble Scroll crece, mientras la órbita tipo silla simétrica que rodea al Atractor de Chua, decrece. El Doble Scroll desaparece, debido a la colisión del atractor con esta órbita, permaneciendo otros ciclos límites simétricos inestables (fig.2.1g). Este fenómeno, denominado Muerte del Doble Scroll, puede observarse en la figura 2.2f.

De (2.1g) a (2.1h), la existencia de una órbita homoclínica simétrica (homoclínica principal, fig.2.2i) que conecta la variedad estable e inestable del punto P_0 , lleva al sistema a una bifurcación global subcrítica tipo silla-nodo, con la consecuente desaparición de las órbitas periódicas simétricas. Sin embargo, como se verá en el capítulo 4, pese a ello, persisten otros ciclos simétricos inestables (fig.2.1h).

³ Como se vio en el apéndice I: una órbita periódica puede ser estable (o inestable) cuando el flujo que parte de un punto x_0 se acerca a la órbita a tiempo positivos (o negativos). Pero una órbita puede también, ser tipo silla, cuando, considerando un plano que corte la órbita y uno de los puntos de intersección de la órbita con este plano (punto fijo x^* de un mapa de Poincaré), el flujo que parte de un punto x_0 en dicho plano, se acerca al punto fijo en una dirección y se aleja en la otra.

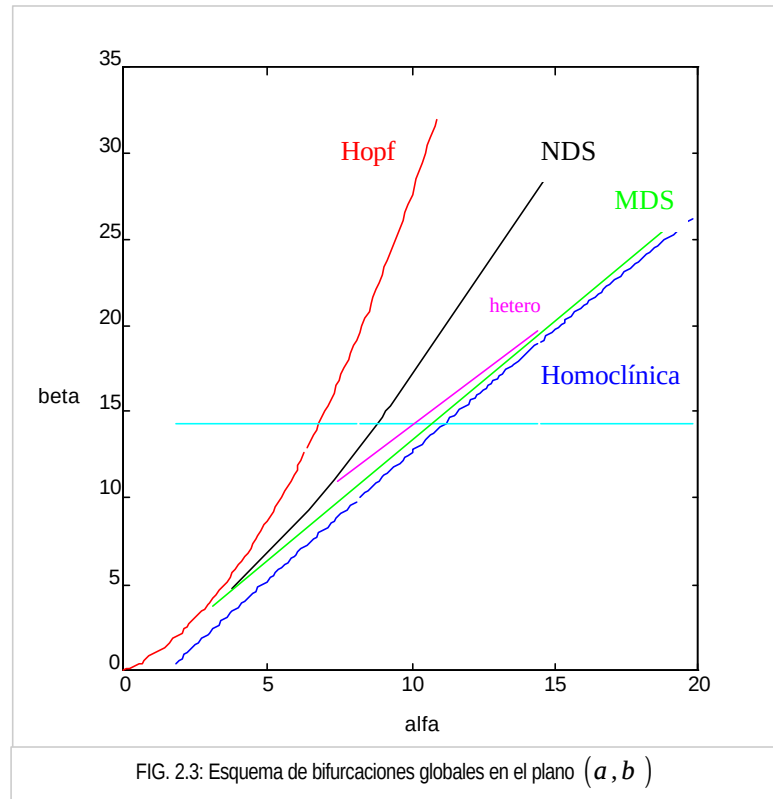
⁴ Una órbita homoclínica $j(t)$ que conecta al punto hiperbólico P_0 consigo mismo verifica:

$$j(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} P_0 \quad j(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} P_0$$

⁵ Una órbita heteroclínica $j(t)$ que conecta a los puntos hiperbólicos P_+ y P_- verifica:

$$j(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} P_+ \quad j(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} P_-$$

Se produce un ciclo heteroclínico, cuando existe dos órbitas heteroclínicas y una verifica la relación anterior y la otra la relación contraria.



En la figura 2.3, se presenta un diagrama de bifurcaciones globales, en el plano (a, b) que muestra las regiones en las que pueden encontrarse los atractores que se describieron en el párrafo anterior y graficaron en la figura 2.2.

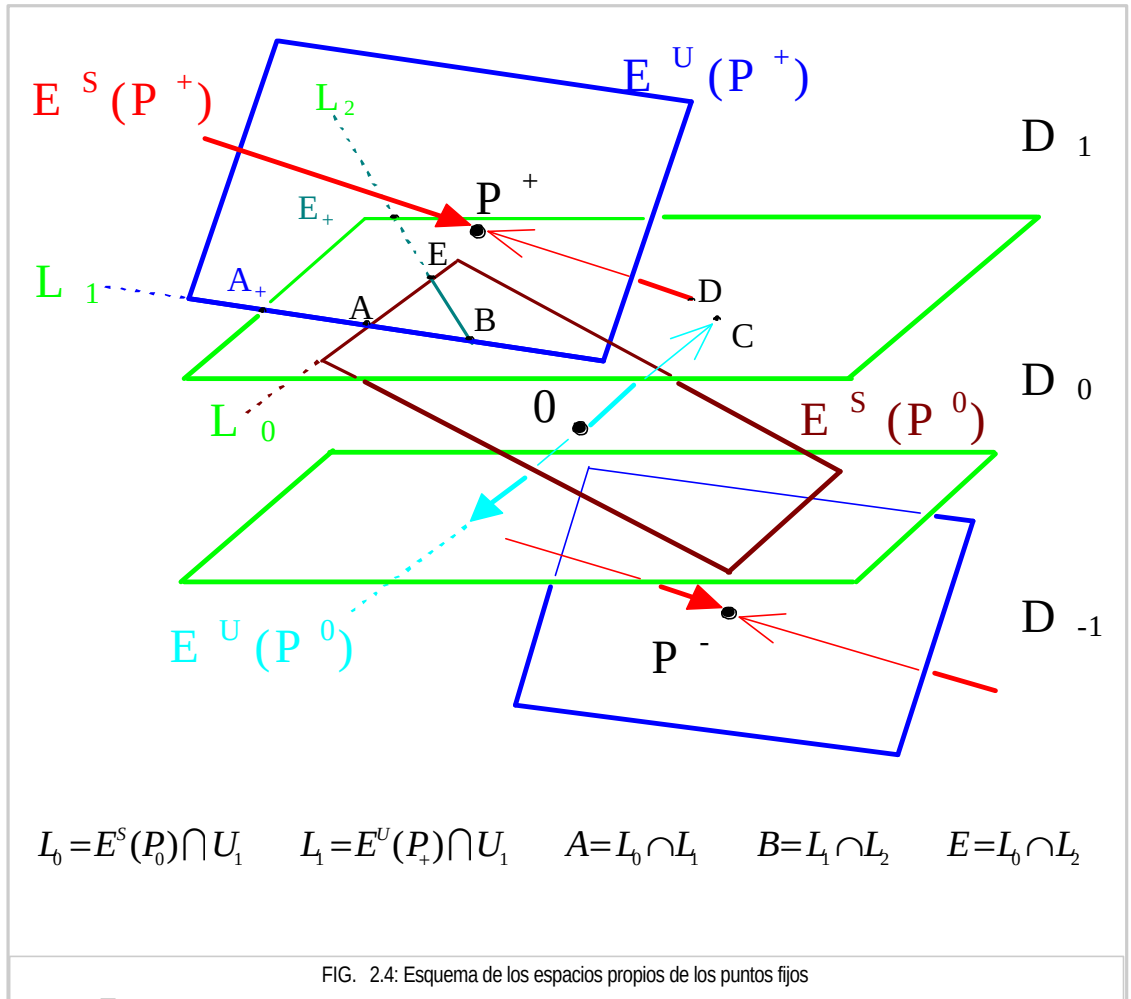
En la gráfica 2.3 se destacan: la curva que señala la bifurcación de Hopf, el Nacimiento (NDS) y la Muerte (MDS) del Doble Scroll, el lugar geométrico en el plano de parámetros donde puede observarse la homoclínica principal (Homoclínica) del sistema, la cual se estudiará en detalle en el capítulo 4 y la curva que señala la presencia de una órbita heteroclínica entre el punto P_+ y P_- (hetero), la cual se estudiará en el capítulo 6.

2.2. NACIMIENTO DEL DOBLE SCROLL.

Nos proponemos hacer una descripción geométrica de las trayectorias del sistema (1.1) en el espacio (x,y,z) cuando los valores de los parámetros a y b están en la zona donde se produce el Doble Scroll. En esta sección desarrollaremos una exposición cualitativa del problema, dejando para el apéndice III una descripción más analítica.

En la región del plano (a, b) donde se produce el Doble Scroll, los autovalores de la matriz jacobiana evaluada en los puntos fijos $P_{\pm}$ y P_0 (ec.II.11) son, respectivamente, de la forma⁶:

$$\begin{aligned} r_0 &= g_1 \in \mathfrak{R} / g_1 < 0 & l_0 &= g_0 \in \mathfrak{R} / g_0 > 0 \\ r_{1,2} &= s_1 \pm jw_1 / s_1 > 0 & l_{1,2} &= s_0 \pm jw_0 / s_0 < 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$



⁶ Valores típicos de los parámetros son:

$$\begin{aligned} a = 9 \quad b = 14.3 & \Rightarrow g_1 = -3.94 \quad s_1 = 0.19 \quad w_1 = 3.05 \\ a = -\frac{1}{7} \quad b = \frac{2}{7} & \Rightarrow g_0 = 2.22 \quad s_0 = -0.97 \quad w_0 = 2.71 \end{aligned}$$

En la figura 2.4 se dibujan los dominios y las seis variedades de los tres puntos fijos. Las fronteras entre los dominios D_1 , D_0 y D_{-1} se ha dibujado en verde claro y corresponde a planos $U_{\pm 1}$ ⁷. Además, se observa en color rojo la recta correspondiente a la variedad estable ($E^S(P_{\pm})$) de los puntos $P_{\pm}$ y en azul los planos correspondientes a sus variedades inestables ($E^U(P_{\pm})$), mientras que en celeste y marrón se han dibujado la variedad inestable y estable ($E^U(P_0)$ y $E^S(P_0)$, respectivamente) del origen P_0 . También se observan otras rectas importantes en la dinámica, las cuales describiremos para la parte superior de la figura, teniendo en cuenta que el sistema es simétrico:

* L_0 es la recta donde el plano $E^S(P_0)$ corta al plano $x = 1$: $E^S(P_0) \cap U_1$.

* L_1 es la recta donde el plano $E^U(P_+)$ corta al plano $x = 1$: $E^U(P_+) \cap U_1$.

* L_2 es la recta que separa los flujos ascendentes de los descendentes en el plano $x = 1$:

A la derecha de L_2 (verde azulado) el flujo (j) que pasa de la región D_0 a la región D_{+1} , mientras que a la izquierda de L_2 , el flujo pasa de la región D_{-1} a la región D_0 . Y el flujo que se inyecta exactamente en algún punto de la recta, volverá al dominio del cual ha partido.

Por otro lado, destacamos la presencia de los puntos:

$$\begin{array}{lll} A = L_0 \cap L_1 & B = L_1 \cap L_2 & E = L_0 \cap L_2 \\ \text{*****} & C = E^U(P_0) \cap U_1 & D = E^S(P_+) \cap U_1 \end{array} \quad \text{*****}$$

Dichos puntos se señalan en la figura 2.4 y también hemos señalado como referencia un punto A_+ , sobre la recta L_1 (más allá del punto A) y un punto E_+ , sobre la recta L_2 (más allá del punto E).

Definimos también, el punto F como aquel punto sobre la recta L_2 , por donde pasa el flujo cuyo vector tangente (x) es paralelo a la recta L_2 . Esto significa que el flujo que pasa por el punto F es tangente a la recta L_2 . Este punto se encuentra entre los puntos B y E y no se ha dibujado en la figura 2.4, pero adquiere vital importancia en la definición del mapa de Poincaré que se desarrolla en el apéndice III.

Describiremos la trayectoria del flujo en el espacio esquematizado en la figura 2.4, para observar el papel que juegan las rectas y puntos antes mencionados en la dinámica del Doble Scroll.

Si partimos de un punto próximo al origen, por encima del plano $E^S(P_0)$ (marrón) en D_0 , el flujo recorrerá una espiral ascendente, alrededor de la recta $E^U(P_0)$ (celeste), aproximándose asintóticamente a esa recta (en la dirección paralela al plano) y alejándose del plano (en la dirección paralela a la recta).

Al intersectar el plano U_1 (verde claro), (a la derecha de L_2 (verde azulado)) el flujo seguirá describiendo una espiral, pero de radio creciente, alrededor de la recta $E^S(P_+)$ (rojo), alejándose de ésta en la dirección paralela al plano $E^U(P_+)$ (azul) y aproximándose a ese plano, dado que g_1 es negativo. El flujo (girando) volverá a intersectar al plano U_1 en algún punto por detrás de la recta L_1 y a la izquierda de la recta L_2 .

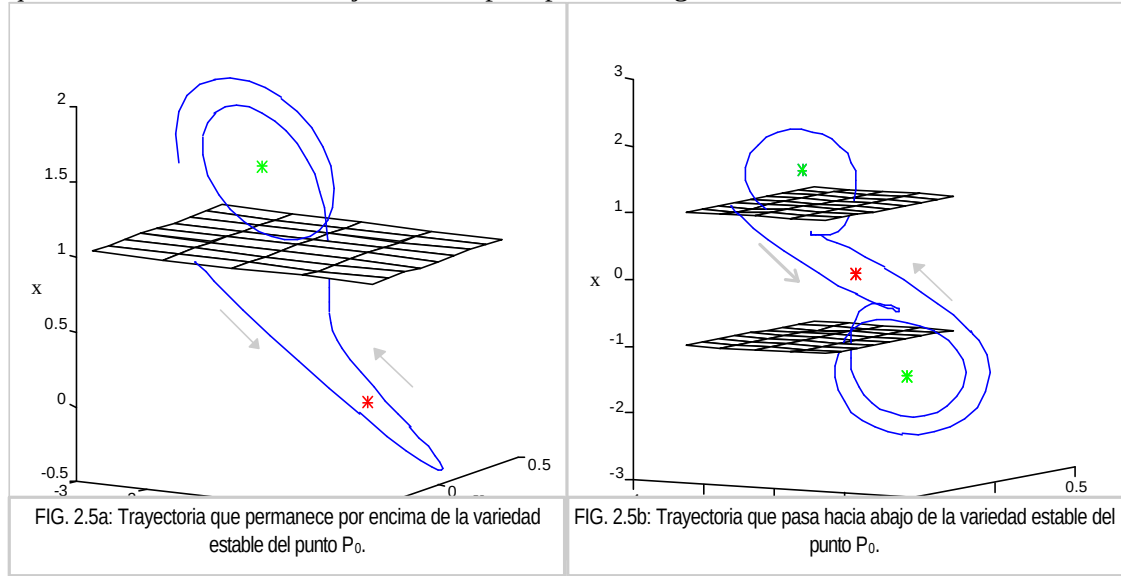
Antes de que se produzca el Doble Scroll, o sea, cuando tenemos el Atractor de Rössler (asimétrico) los puntos de pasaje del flujo desde D_{-1} a D_0 , están en el triángulo ABE. Cuando se ha producido el Doble Scroll, dichos puntos se encuentran en el ángulo A_+BE_+ .

⁷ Donde $U_{\pm 1} = \{(x, y, z) / x = \pm 1\}$

En el primer caso, el flujo permanecerá por encima del plano $E^S(P_0)$ como se observa en la figura 2.5a: una trayectoria que parte de un punto sobre el plano U_1 , que se encuentra en el triángulo ABE, se inyecta en la región D_0 , por encima del plano estable del origen, ascendiendo en la dirección de la recta inestable de este punto. En la región D_{+1} la trayectoria da un giro de radio creciente muy pegada al plano inestable del punto P_+ ⁸.

En el segundo caso (cuando ya se ha producido el Doble Scroll), el flujo pasará a veces por encima y otras veces por debajo del plano $E^S(P_0)$. La figura 2.5b muestra una trayectoria que comenzando en el ángulo A_+BE_+ (a la izquierda de la recta L_1) recorre la región D_0 por debajo del plano estable del origen, se inyecta en la región D_{-1} , efectuando un giro alrededor de P_- , para luego volver a la región D_0 por encima del plano estable del origen.

Es importante hacer notar que una trayectoria similar a la dibujada en la figura 2.5a puede encontrarse en presencia del Atractor de Rössler como en presencia del Atractor de Chua, dado que en este último caso el flujo también pasa por el triángulo AEB.



Queremos resaltar (en relación con la figura 2.4) que una trayectoria que parte del punto C, podría incidir en los puntos del segmento $\overline{AE}$ y siempre que la relación entre g_0 y s_0 sea tal que el flujo no llegue al plano U_1 , el tiempo de retorno al punto C, sería infinito, por lo que estaríamos en presencia de una trayectoria homoclínica (ver figura 2.2i) que, partiendo de un punto de la variedad inestable del origen, recorra la región D_1 y se inyecte en la región D_0 exactamente en el plano estable de P_0 .

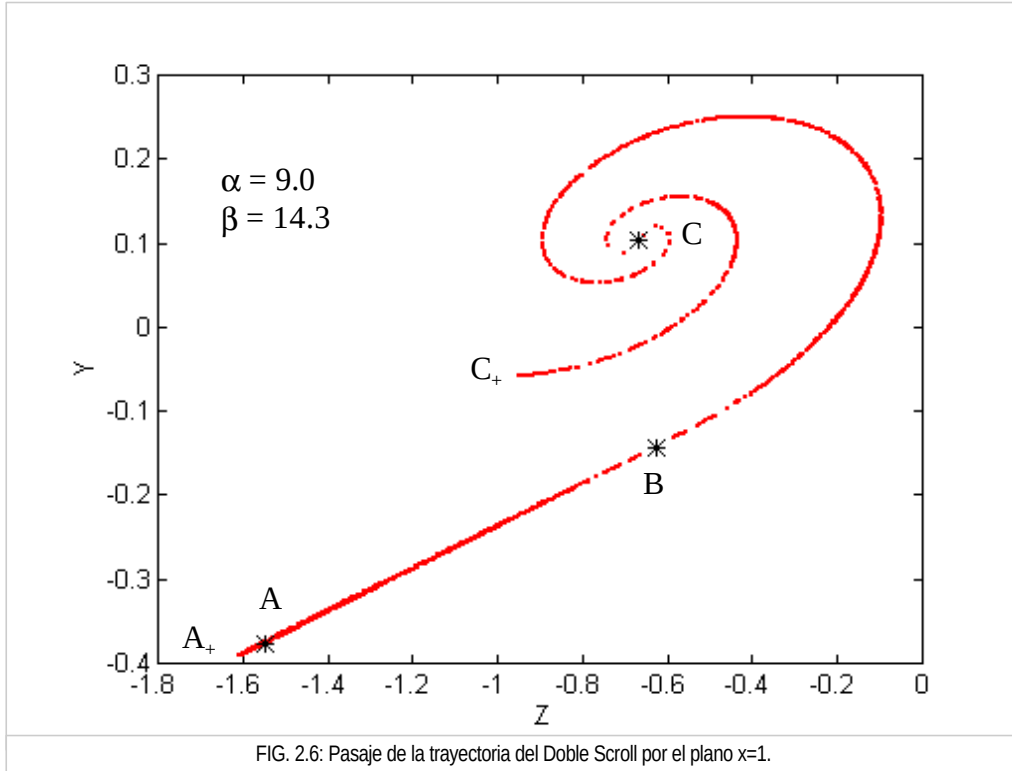
Como se verifica que el autovalor real de la matriz jacobiana evaluada en $P_{\pm}$ es muy negativo ($|g_1| > 1$), en las figuras 2.5 (en relación con la figura 2.4), se observa que el flujo apenas entra en D_{+1} , se “pega” al plano inestable del punto P_+ ($E^U(P_+)$) y entonces, el posterior pasaje a través del plano U_1 , se produce muy próximo a la semirrecta A_+B (incluida en la recta L_0). En la figura 2.6 se observan los puntos del plano U_1 por donde pasa el flujo. En particular, por debajo del punto B, se observa un fino corredor, correspondiente al flujo descendente.

El pasaje del flujo ascendente por el plano U_1 (por encima del punto B, en la figura 2.6), se grafica en dos espirales centradas en el punto C: Como $|s_0| \ll g_0$, los flujos que recorren D_0 no “se acercan” rápidamente hacia la variedad inestable del origen ($E^U(P_0)$). Relacionando estas espirales con las figuras 2.4 y 2.5, señalamos que:

⁸ En la figura 2.5 se dibuja el punto P_0 en rojo y los puntos $P_{\pm}$ en verde.

Los flujos que parten de puntos $x_1 \in U_1$ (a la derecha de la recta L_0 , verificando: $x_1 \in \overline{AB}$), recorrerán la región D_0 pasando por encima de $E^S(P_0)$. Al cabo de un tiempo t_1 , regresarán al plano U_1 (entrando en D_{+1}), a través de puntos x_2 , que se computan en la espiral BC . Dicha espiral se llama puerta de entrada superior, pues el flujo se ha mantenido por encima del plano estable del origen.

Los flujos que parten de puntos $x'_1 \in U_1$ (a la izquierda de L_0 y verificando: $x'_1 \in \overline{AA_+}$), recorrerán la región D_0 pasando por debajo de $E^S(P_0)$ hacia D_{-1} , se “pegarán” a $E^U(P_-)$, regresarán a D_0 y finalmente (al cabo de un tiempo t'_1) se computarán en U_1 en puntos x'_2 , pertenecientes a la espiral CC_+ , que llamaremos puerta de entrada inferior, ya que el flujo recorrió el semiespacio inferior, definido por la variedad estable del origen.



Por último señalamos que si el punto x_1 coincide con el punto A , el tiempo de retorno al plano U_1 sería infinito y el punto x_2 y el punto x'_2 , coincidirían con el punto C , centro de las espirales “puerta de entrada superior” y “puerta de entrada inferior”, respectivamente.

El propósito de este trabajo es estudiar el Nacimiento del Atractor de Chua, por lo que no incluimos, en el cuerpo central del mismo, información detallada sobre la muerte del atractor. En el final del apéndice III se estudia dicho fenómeno a través del mapa de Poincaré. Aquí simplemente diremos que para todos los valores de los parámetros para los cuales se observa el Doble Scroll, se observa también por lo menos un ciclo límite simétrico tipo silla, que rodea al atractor. El pasaje de ese ciclo por el plano U_1 , genera un par de puntos J^+ y J^- (que no fueron dibujados en la figura 2.6) y cuando el valor de los parámetros es tal que la espiral CC_+ , pasa por alguno de esos puntos, el flujo diverge hacia el infinito, destruyéndose la estructura del Doble Scroll.

CAPITULO 3. MAPA UNIDIMENSIONAL.

En este capítulo explicamos cómo construimos un mapa unidimensional para el sistema (1.1), con el fin de estudiar las propiedades de los atractores que se describieron en el capítulo anterior. En los capítulos 4, 5 y 6 utilizaremos este mapa para estudiar las propiedades de las órbitas homoclínicas que presenta el sistema y que explican la estructura de órbitas cerradas que regulan la dinámica del Atractor de Chua.

3.1.DEFINICION.

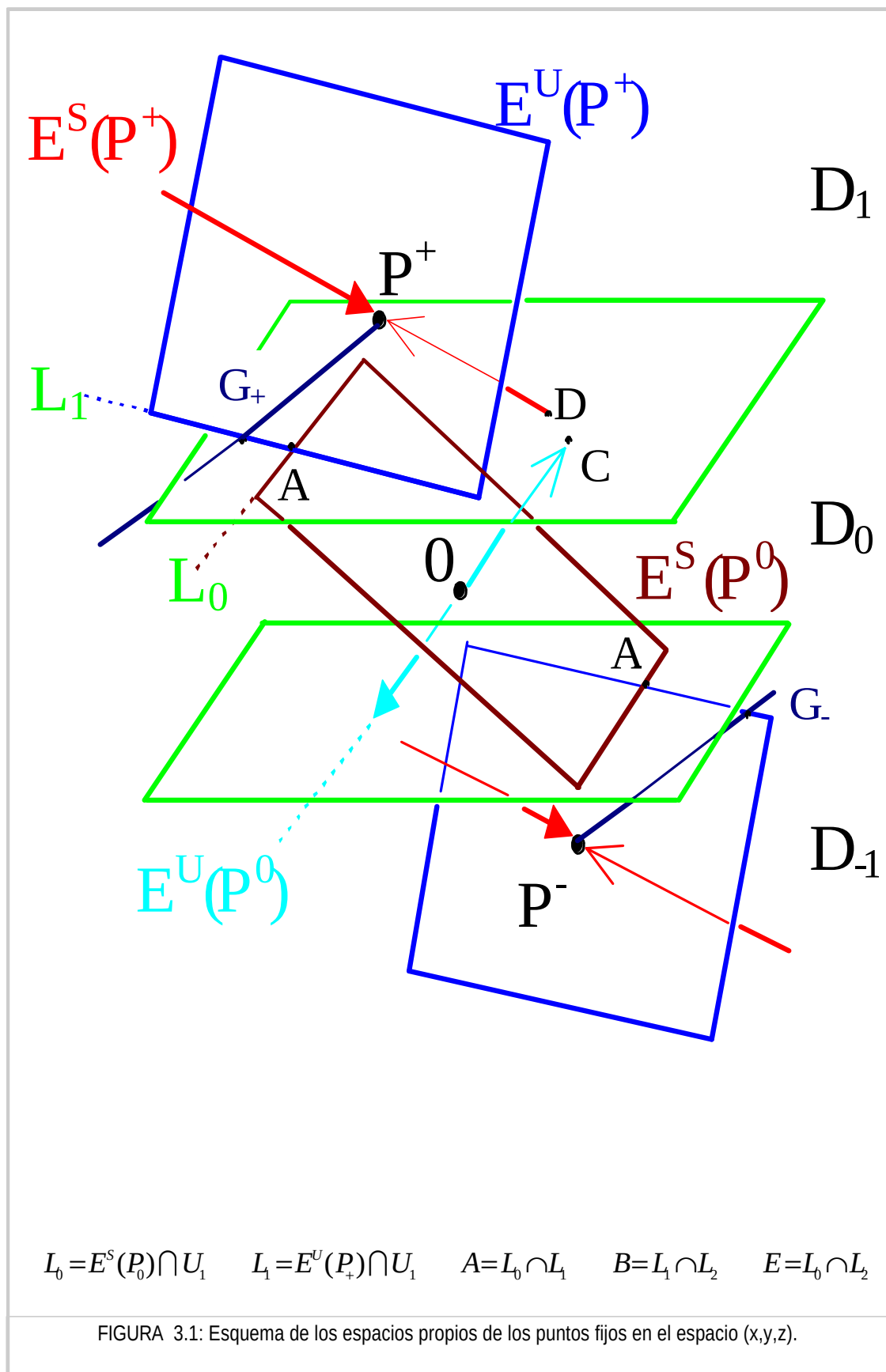
En la sección 2.2, se observó que cuando el autovalor real de P_+ es suficientemente negativo, el flujo que pasa desde la región D_0 a la región D_{+1} , “se pega” al plano $E^U(P_+)$ ⁹. Teniendo en cuenta esta propiedad, definimos un mapa unidimensional, considerando el flujo sobre los planos $E^U(P_{\pm})$. Dicho mapa es continuo para una amplia región del plano de los parámetros (a, b) .

En la figura 3.1, consideramos nuevamente la posición en el espacio (x,y,z) de los planos y rectas que definen las variedades estables e inestables de los puntos fijos del sistema (1.1) y los planos $x = \pm 1$. Sobre el plano $E^U(P_+)$, definimos una semirecta entre el punto P_+ y un punto G_+ perteneciente a la recta L_1 , más allá de A . Del mismo modo, definimos una semirecta simétrica (sobre el plano $E^U(P_-)$) entre los puntos P_- y G_- . El mapa unidimensional, se computará considerando los puntos de estas semirrectas.

La absisa del mapa se computa considerando las coordenadas de un punto x_1 , perteneciente a la semirecta P_+G_+ , mientras que la ordenada del mapa, está dada por las coordenadas de un punto x_2 (imagen de x_1) que puede pertenecer o bien a la semirecta P_+G_+ ó bien a la semirecta P_-G_- . Esto es: si la trayectoria parte de un punto x_1 sobre la semirecta superior y simplemente rota alrededor de P_+ o pasa de la región D_{+1} a la región D_0 por arriba del plano $E^S(P_0)$, para luego reinyectarse en D_{+1} , la imagen x_2 del punto de partida se computará en la recta P_+G_+ . Pero la imagen x'_2 de un punto x'_1 de la semirecta P_+G_+ puede estar en la recta P_-G_- , si la trayectoria que parte de x'_1 , pasa por debajo del plano $E^S(P_0)$, para inyectarse en la región D_{-1} . Y esta imagen, aunque se haya computado en la otra semirecta, se dibujará en el mismo mapa. Más adelante, en relación con las figuras 3.2 y 3.3, analizaremos en detalle las diferencias que se observan en uno u otro caso.

Consideramos como medida del punto computado, el cuadrado de la distancia entre dicho punto y el punto P_+ ó P_- , según la semirecta sobre la cual se computa. Adicionalmente, normalizamos esa distancia al cuadrado, considerando la distancia al cuadrado que media entre un punto (al que llamamos H (H_+ ó H_-)) de la semirecta y el punto P (P_+ ó P_- , respectivamente). El punto H , que se encuentra, entre el punto P y el punto G , tiene las siguientes propiedades:

⁹ Recordamos que las mismas propiedades que se observan para P_+ , se observan para P_- .



Cuando se está en presencia del Atractor de Rössler, el punto H_+ es el punto computado sobre la semirrecta P_+G_+ , que está más alejado de P_+ y entonces, consideramos que la distancia al cuadrado normalizada desde el punto H_+ al punto P_+ es la unidad. Las coordenadas (r_n, r_{n+1}) del mapa son menores o iguales a la unidad¹⁰.

Cuando se está en presencia del Doble Scroll, el punto H_+ de la semirrecta P_+G_+ corresponde a aquel punto para el cual la trayectoria, al cabo de un cierto tiempo, se inyecta en la región D_0 “pegada” al plano $E^S(P_0)$ (variedad estable del origen). Entonces, un punto x_1 sobre el segmento P_+H_+ , tiene una absisa normalizada menor que la unidad y su imagen x_2 (representada por la ordenada del mapa) se computará sobre la semirrecta P_+G_+ , mientras que un punto x'_1 de la semirrecta H_+G_+ , tiene una absisa normalizada mayor que la unidad y su imagen x'_2 se computará sobre la semirrecta P_-G_- , (ya que el flujo recorre la región D_0 , por debajo del plano $E^S(P_0)$).

Como las mismas propiedades son verificadas por los flujos que parten del segmento P_-H_- y de la semirrecta H_-G_- , en el mapa pueden distinguirse los puntos x_1 de imagen x_2 (en la misma semirrecta), de aquellos puntos x'_1 de imagen x'_2 (en la otra semirrecta), observando simplemente si la absisa verifica: $r_n < 1$ ó $r_n > 1$, respectivamente.

Teniendo en cuenta, entonces, la distancia al cuadrado normalizada y medida desde los puntos que pasan por la semirrecta $P_\pm G_\pm$ al punto $P_\pm$, respectivamente, definimos:

$$r_{n+1} = f(r_n) \quad / \quad f: P_\pm G_\pm \rightarrow P_\pm G_\pm \quad (3.1)$$

3.2 EJEMPLOS.

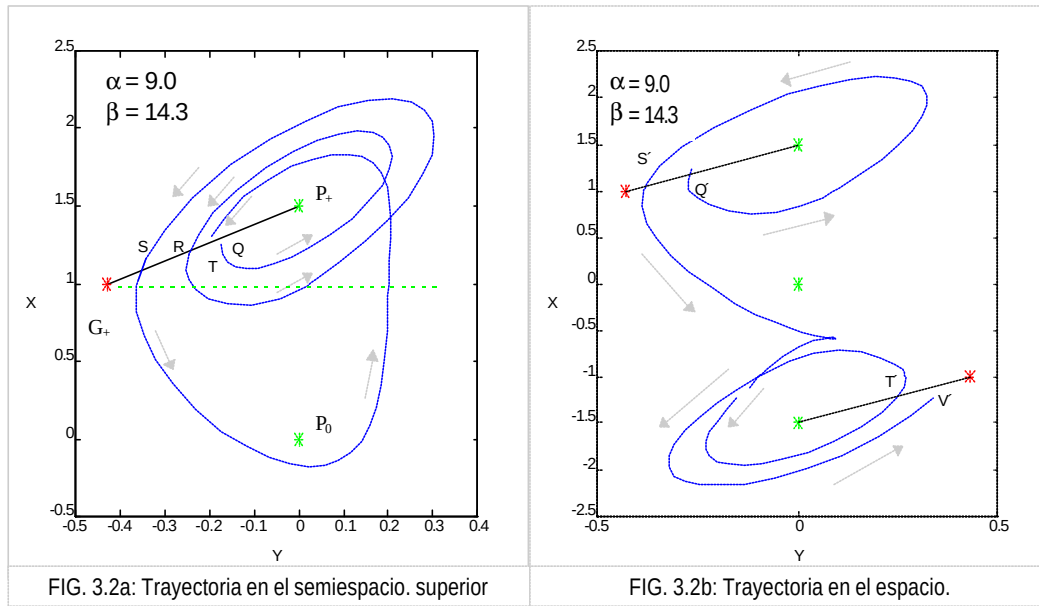
Un mapa unidimensional como el definido en (3.1) se grafica en la figura 3.3, donde se señalan, especialmente, los puntos computados para las trayectorias dibujadas en la figura 3.2. Dichas figuras, de similares características que las dibujadas en la figura 2.5 del capítulo anterior, pero en el plano (y, x) , corresponden a trayectorias computadas para valores de parámetros para los cuales se observa la presencia del Atractor de Chua.

Considerando la figura 3.2a, podemos observar que si el flujo parte de un punto Q (sobre la recta P_+G_+) da una vuelta de radio creciente alrededor del punto P_+ , sobre el plano $E^U(P_+)$ e incide en el punto R. En el mapa de la figura 3.3 puede observarse que el punto Q (de absisa $r_n \approx 0.2$) tiene por imagen al punto R que se computa en la misma región (aproximadamente lineal) del mapa.

El siguiente pasaje del flujo (punto S, imagen del punto R, en la figura 3.2a), se realiza en la misma recta P_+G_+ . Pero la absisa de S, en la figura 3.3, está a la derecha del máximo del mapa. Esta propiedad está indicando que el flujo que parte de R, generó una segunda vuelta alrededor del punto P_+ , pero introduciéndose en la región D_0 por un breve lapso de tiempo.

Por último, y observando que la imagen del punto S es el punto T (sobre la región aproximadamente lineal del mapa), sabremos que la trayectoria que parte del punto S (continua en la figura 3.2a), se introdujo en D_0 e influenciada por la variedad inestable del origen se reinyectó en la región D_{+1} , para generar el punto T (entre el punto Q y el punto R).

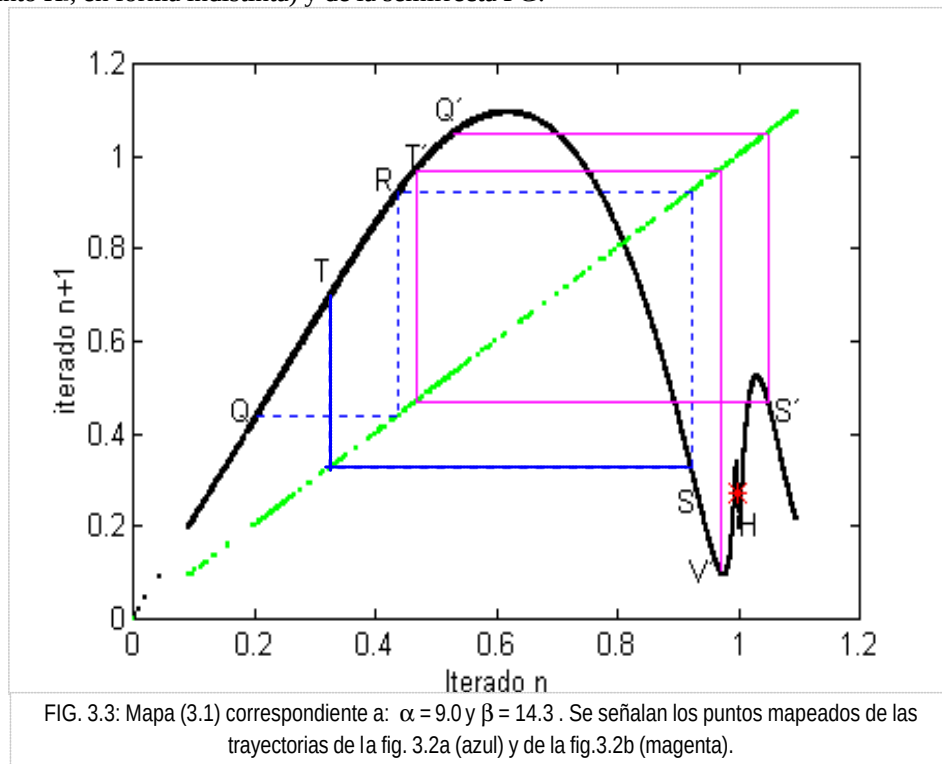
¹⁰ Obsérvese que el flujo puede partir de un punto sobre la semirrecta H_+G_+ . Sin embargo, sus sucesivas imágenes se computarán en los segmentos P_+H_+ ó P_-H_- , atraídos por el Atractor de Rössler del mismo ó del otro semiespacio definido por el plano estable del origen. Entonces, este punto x_1 ó x'_1 (de absisa mayor que la unidad), será un punto aislado del mapa.



En relación con la trayectoria dibujada en la figura 3.2b, y observando las abscisas de los puntos unidos a través de líneas magentas en el mapa de la figura 3.3, podemos concluir que si el flujo parte de un punto Q' (sobre la semirrecta $P+G_+$), presentará una imagen S' sobre la misma semirrecta.

Pero como la distancia al cuadrado normalizada desde S' al punto P_+ es mayor que la unidad (S' se observa a la derecha de H_+), el siguiente punto T' (de abscisa menor que la abscisa del punto Q'), se computará sobre la semirrecta $P.G.$.

El sistema seguirá evolucionando en la región D_{-1} hacia el punto V' (sobre la semirrecta $P.G.$) pero el mapa no notará el cambio, por lo que podemos simplemente hablar del punto H (en referencia al punto H_+ o al punto H_- en forma indistinta) y de la semirrecta PG .



3.3 EJEMPLOS NOTABLES.

A continuación, ilustramos algunos casos de mapas unidimensionales donde se ponen en evidencia la existencia de los fenómenos que analizamos en detalle en los próximos capítulos.

En la figura 3.4a₁ (ver siguiente página) se grafica el mapa correspondiente al nacimiento del Doble Scroll: La imagen del máximo principal del mapa, corresponde a un pasaje sobre el plano $E^S(P_0)$ y el flujo no pasó más allá de H, por lo que permaneció en uno de los semiespacios definidos por este plano. La figura 3.4a₂ es una ampliación del mapa 3.4a₁, en la zona cercana al punto H y se observa una sucesión de máximos y mínimos que están relacionados con la espiral BC (puerta de entrada superior, definida en la sección 2.1) y serán analizados en detalle en el capítulo 6. Vale hacer notar que la existencia de estos máximos y mínimos persiste para valores de los parámetros, más allá del nacimiento del Doble Scroll (NDS en la figura 2.3), como se puede observar, también, en el mapa de la figura 3.3.

En la figura 3.4b₁ se grafica la muerte del Doble Scroll. El punto fijo de coordenadas (2,2) en este mapa, representa un ciclo simétrico (tipo silla) que rodea al repelente. Los puntos del máximo del mapa (dibujados en verde) se mapearán sobre los puntos verdes de la derecha y estos a su vez, lo harán en puntos que distan aún más del punto P, por lo que los puntos verdes señalan el escape del flujo al infinito.

La figura 3.4b₂ (que es un detalle de la zona central del mapa 3.4b₁) muestra la existencia de una órbita homoclínica alrededor del origen (ver figura 2.2i): el punto H es un punto fijo del mapa por lo que el flujo que se inyecta por este punto recorrerá el plano $E^S(P_0)$ y tardará un tiempo infinito en regresar al mismo punto o su simétrico, conectando la variedad inestable del origen con su variedad estable. Este fenómeno se estudia en el siguiente capítulo, donde también se explica la presencia de otros puntos fijos.

La figura 3.4c₁ pone en evidencia la existencia de una órbita homoclínica alrededor del punto P (ver figura 2.2g): la imagen del mínimo del mapa (de absisa 1), es el punto P (de absisa nula, en el mapa). El flujo que partió del punto de la recta PG (correspondiente a ese mínimo del mapa), se inyectará exactamente por la variedad estable del punto P y habrá conectado la variedad inestable y estable de dicho punto. Como se verá en el capítulo 5, este mínimo se produce cuando se está en presencia del Atractor de Rössler, por lo que el flujo que genera este mapa se mantiene siempre en uno de los semiespacios definidos por $E^S(P_0)$.

Por último, la figura 3.4c₂ muestra que el Doble Scroll coexiste con una órbita heteroclínica (ver figura 2.2h). El fenómeno puede visualizarse cuando el mínimo tiene ordenada nula, pero se ubica a la derecha del punto H. El flujo que parte de un punto de la semirrecta P_+G_+ (de coordenadas (1.5,0) en el mapa) sólo puede inyectarse en la variedad estable del P. (de coordenadas (0,0) en el mapa), conectando de esta forma la variedad inestable de P_+ , con la variedad estable de P_- .

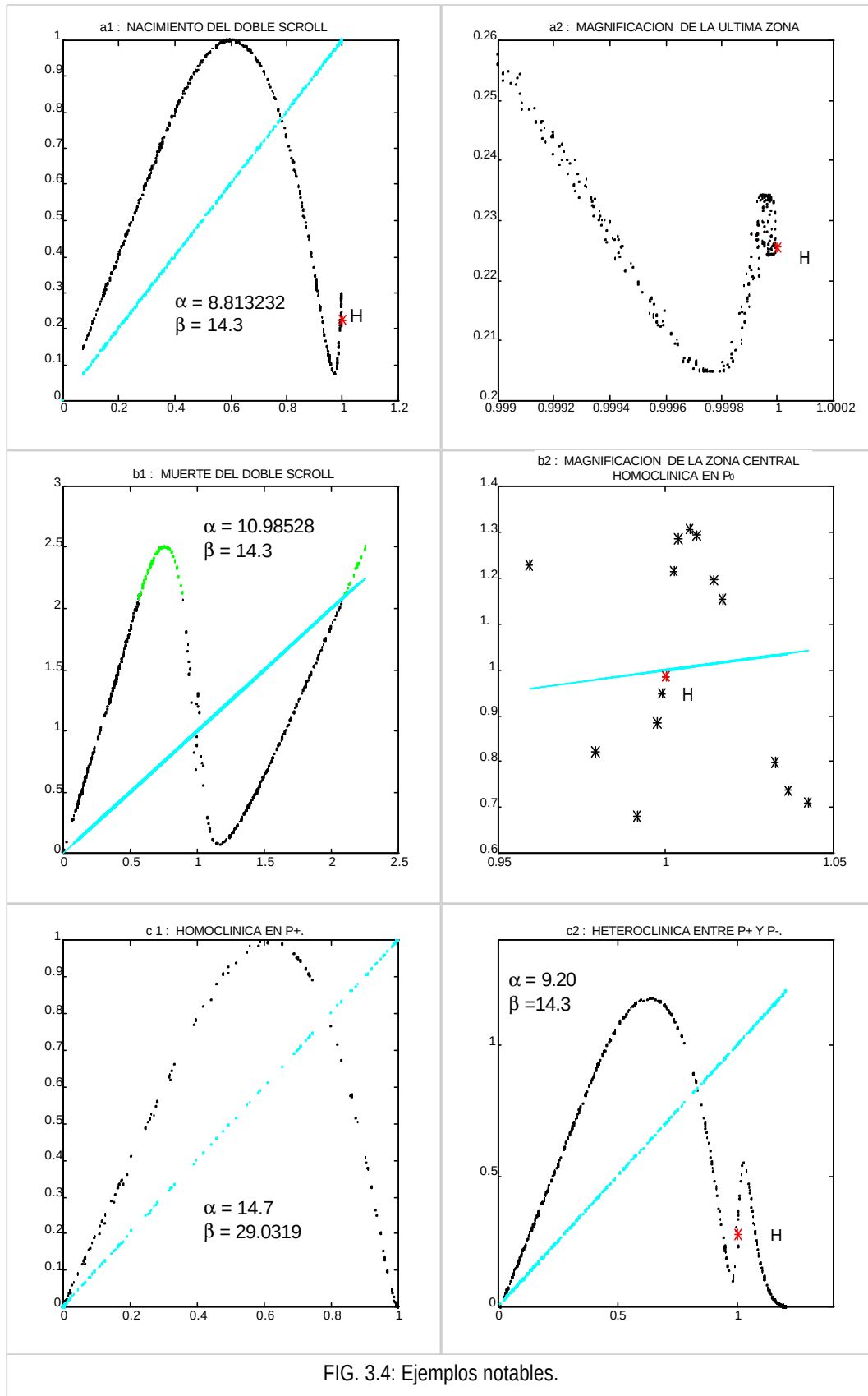


FIG. 3.4: Ejemplos notables.

CAPITULO 4. ORBITA HOMOCLINICA PRINCIPAL.

En el capítulo 2 hemos detallado el surgimiento de varios atractores cuya estructura puede explicarse a través de diferentes bifurcaciones homoclínicas que sufre el sistema (1.1)¹¹. En este capítulo desarrollaremos el estudio de la bifurcación que sufre la órbita homoclínica principal del sistema que conecta la variedad estable e inestable del punto P_0 . Esta órbita es de tipo Shilnicov, para aquellos valores de los parámetros para los cuales se produce el Nacimiento, Vida y Muerte del Doble Scroll y el estudio cuantitativo de estas bifurcaciones globales, se desarrolla en el apéndice IV, para un sistema dinámico de tres dimensiones.

4.1 CONDICIONES RESONANTES

En una bifurcación homoclínica surgen, desaparecen o coexisten órbitas periódicas de diferentes propiedades, según sea el comportamiento de las raíces del polinomio característico, evaluado en el punto de equilibrio. Nos proponemos describir las propiedades más relevantes de estos ciclos, en el plano (a, b) de parámetros, haciendo incapié en aquellas zonas en las cuales se ha verificado la existencia de la órbita homoclínica principal. Para ello, identificamos cuatro condiciones (usualmente llamadas de resonancia [8])¹²:

$$\begin{aligned} s_1: \quad l_1 - l_2 &= 0 \\ s_2: \quad l_0 + l_{12} &= 0 \\ s_3: \quad 2l_0 + l_1 + l_2 &= 0 \\ s_4: \quad l_0 + l_1 + l_2 &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

En la figura 4.1 se presentan estas condiciones evaluadas en el origen.

La condición de resonancia s_1 indica la frontera entre las soluciones reales y complejas. La determinación de esta condición ya fue discutida en el apéndice II, cuando explicábamos las bifurcaciones locales del sistema (1.1).

Esta frontera, en el marco de las bifurcaciones homoclínicas, es muy importante, puesto que el número y estabilidad de órbitas periódicas asociadas a la bifurcación, para valores de los parámetros, por encima y por debajo de la condición s_1 , es muy diferente:

Una órbita periódica simétrica existente para valores de parámetros donde los autovalores de P_0 son reales, evolucionará hacia una órbita homoclínica, aumentando su período a medida que se varían los parámetros. Cuando estos adquieran su valor crítico, se producirá entonces, la órbita homoclínica y más allá de ese valor crítico, la órbita cerrada (homoclínica o periódica) desaparecerá.

¹¹ Cuando nos referimos a una bifurcación homoclínica, nos referimos a los cambios que sufre el sistema cuando variamos el parámetro de control, desde el valor crítico para el cual se tiene una órbita homoclínica.

¹² Definimos : $l_{12} = \max(l_1, l_2)$

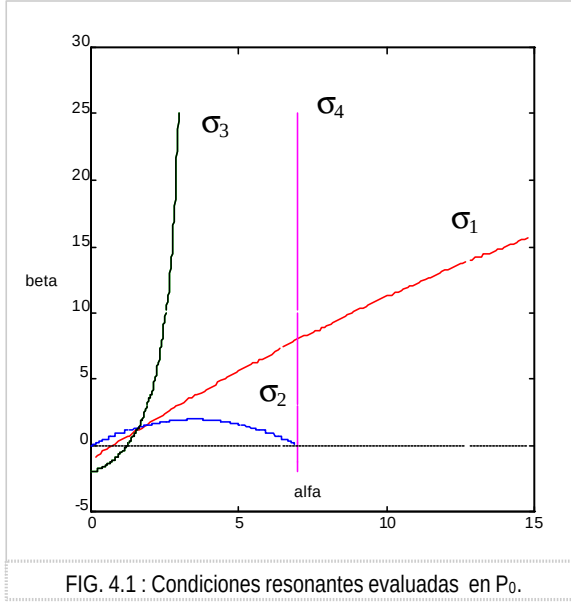
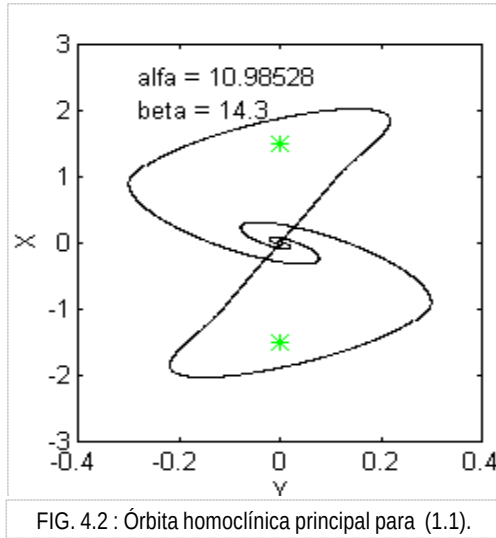


FIG. 4.1 : Condiciones resonantes evaluadas en P_0 .
 tanto para autovalores reales como para autovalores complejos¹⁴.
 En el primer caso (autovalores reales), la bifurcación homoclínica que se da en la región limitada por s_2 y s_4 está relacionada con un único ciclo límite de tipo silla, mientras que a la derecha de s_4 (por debajo de s_1) el ciclo es completamente inestable.

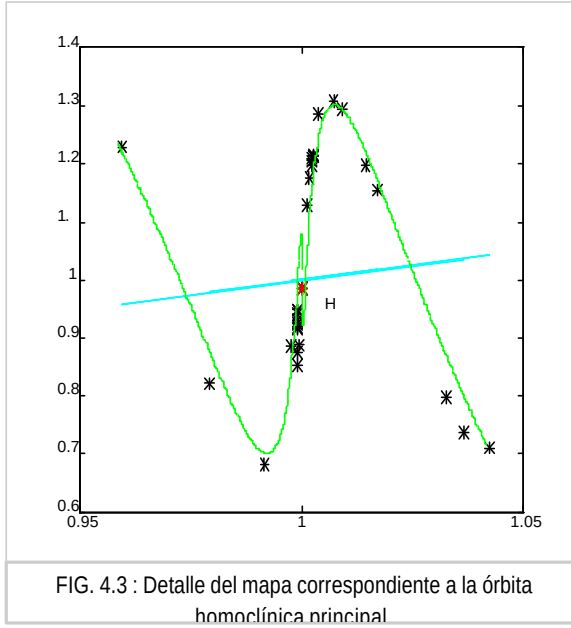
En el segundo caso (autovalores complejos), la órbita homoclínica es de tipo Shilnicov. En la figura 4.2 se dibuja esta curva homoclínica y, como se estudiará en la siguiente sección con ella coexisten infinitas órbitas periódicas de tipo silla. Cuando se varía el valor de uno de los parámetros (por ejemplo a , habiendo fijado el valor de b) alguno de esos ciclos adquieren estabilidad definida: son estables si el valor de los parámetros se encuentra a la izquierda de s_4 e inestables a la derecha de s_4 .



¹³ Esta condición es equivalente a: $d \equiv -\frac{\text{Re}(l_1, l_2)}{l_0} = 1$

¹⁴ Esta consición es equivalente a: $l_0 = -(l_1 + l_2) / l_1, l_2 \in \Re \quad l_0 = -\frac{1}{2} \text{Re}(l_1, l_2) \rightarrow d = \frac{1}{2}$

4.2 MAPA UNIDIMENSIONAL DE LA HOMOCLINICA PRINCIPAL.



En la figura 4.3 se grafica la zona cercana al punto H, del mapa correspondiente a la órbita homoclínica principal simétrica de la figura 4.2. El punto H es un punto fijo del mapa, ya que el siguiente paso se computará en el otro semiespacio definido por $E^S(P_0)$, o sea en el punto H simétrico. Pero además, por definición, el punto H es el punto por donde pasa el flujo que se inyecta exactamente por el plano $E^S(P_0)$.

El mapa presenta a la derecha e izquierda del punto H máximos y mínimos como los que presentaba el mapa local estudiado en la sección IV.1.2 [4]¹⁵.

Vale recalcar que las órbitas homoclínicas del sistema (1.1) son atractores globalmente inestables. Eso significa que al pretender reproducir computacionalmente la trayectoria, una pequeña variación de la condición inicial, conduce el sistema al infinito, como se observó en la figura 3.4b₁. En general, dado que el round off error es inherente a la

simulación, los flujos y el punto H de los mapas en las órbitas homoclínicas que presentamos en este trabajo, son sólo aproximados. Esto es: si el sistema partiera del verdadero punto H, el mapa se lograría con un único punto fijo.

La inestabilidad global, también, impide computar detalladamente la región del mapa cercana al punto H. Entonces, ajustamos empíricamente los datos, teniendo en cuenta la ecuación IV.10 y el valor de los máximos y mínimos conocidos. En la figura 4.3 se presenta, también el resultado de este ajuste (líneas verdes).

La intersección de la recta $r_n = r_{n+1}$ con el mapa señala la presencia de otros puntos fijos en las ramas del mapa que unen dos extremos relativos consecutivos. Estos puntos fijos (a la izquierda y derecha del punto H) son los ciclos límites (asimétricos y simétricos, respectivamente) que coexisten con la órbita homoclínica, para un valor a_H del parámetro de control. Su estabilidad de tipo silla, impide obtener información experimental del mapa para puntos cercanos a ellos.

Si se varía el parámetro a alrededor de a_H , el mapa presentará variaciones. Se observa, por ejemplo, que para $a < a_H$ la ordenada del punto H es menor que en el caso de producirse la órbita homoclínica y la región, en general, se mapeará un poco más abajo, manteniendo la misma estructura. El efecto será el mismo que el correspondiente a subir la recta $r_n = r_{n+1}$, trasladando hacia arriba la escala de la ordenada, pero manteniendo fijo el mapa. De mismo modo, cuando se aumenta a respecto del valor a_H , se puede estudiar el mapa, considerando que la recta $r_n = r_{n+1}$ se grafica más arriba de lo que se señala en la figura 4.3.

Las mismas observaciones se verifican si, en lugar de aumentar o disminuir a , disminuimos o aumentamos b , respectivamente.

4.3 ORBITAS PERIODICAS PRINCIPALES.

¹⁵ En este caso, el plano p_0 está dado por el plano perpendicular a $E^U(P)$ que pasa por la recta PG (ec. 3.1) y si bien este plano no es perpendicular al plano $E^S(P_0)$, representa a todos los puntos que se inyectan por encima o por debajo de la variedad estable de P_0 . La distancia de estos puntos al punto H, está por lo tanto, representando la coordenada w del mapa definido por la ecuación IV.10.

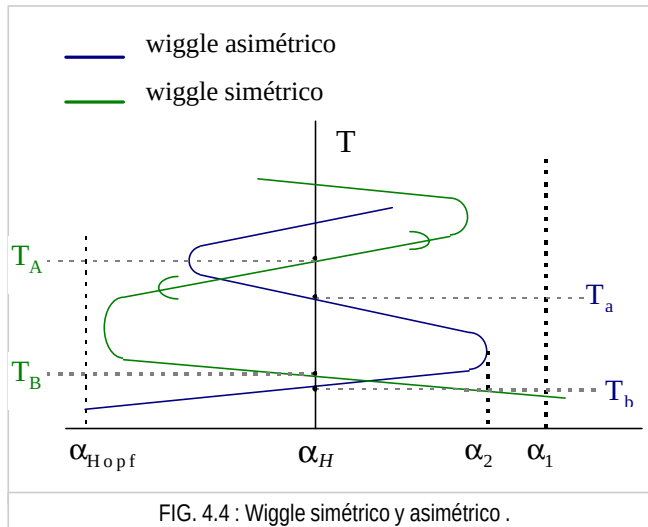


FIG. 4.4 : Wiggle simétrico y asimétrico .

Consideramos el ciclo límite asimétrico y estable que surge alrededor de $P_{\pm}$, cuando se produce una bifurcación de Hopf supercrítica. Cuando este ciclo es pequeño y su trayectoria permanece en la región D_1 , es difícil relacionarlo con los que surgen de una bifurcación de tipo Shilnicov de la órbita homoclínica principal. Sin embargo (si se aumenta el valor del parámetro a y mantiene fijo el valor del parámetro b , por ejemplo), el ciclo crece en el espacio (x, y, z) y su período aumenta. Posteriormente, pierde estabilidad a través de una duplicación de período, pero atraviesa la región D_0 y comienza a presentar las propiedades que presenta la órbita periódica principal en el análisis local de Glendinning y

Sparrow [4]: puede graficarse un wiggle alrededor de a_H , que indique cómo va variando el período de la órbita con el valor del parámetro de control (wiggle asimétrico (azul) del figura 4.4).

Estudiamos ese wiggle asimétrico en relación con los puntos fijos del mapa, a la izquierda del punto H. Consideramos para ello, en primera instancia, el comportamiento del mapa para $a_1 \gg a_H$. Como, en este caso todo el mapa, y en particular, el mínimo a la izquierda del punto H en la figura 4.3, se grafica por arriba de la recta $r_n = r_{n+1}$, no existen ciclos límites. Esta situación también se observa en la figura 4.4.

Una posterior disminución del valor del parámetro (equivalente a un corrimiento de la recta $r_n = r_{n+1}$ hacia arriba, en la figura 4.3) coincidirá con el nacimiento de dos ciclos a través de una bifurcación nodo-silla en el mínimo del mapa. En la figura 4.4, para a_2 , se observa la formación del “codo” que presenta el wiggle asimétrico a la derecha del valor a_H .

Disminuyendo aún más el valor del parámetro y por lo tanto, corriendo la recta $r_n = r_{n+1}$ hacia arriba, nuevamente, se observa que uno de los ciclos (el que tiene su punto fijo entre el mínimo y el máximo pequeño, a la izquierda del punto H, en la figura 4.3) se va “acercando” hacia el punto H, mientras que el que se encuentra más a la izquierda de la figura, se va “alejando” del punto H. Como la posición del punto fijo respecto del punto H, indica cuantitativamente el valor del período de la órbita, el primer punto fijo representa a un ciclo límite que al irse “corriendo” va aumentando su período, mientras el segundo representa a un ciclo límite que va disminuyendo su período¹⁶. Cuando $a = a_H$, ambos ciclos (de tipo silla) coexisten con la órbita homoclínica, presentando períodos $T_a > T_b$.

Si se disminuye, aún más, el valor de a , la recta $r_n = r_{n+1}$ coincide con el máximo pequeño, próximo y a la izquierda de H, perdiéndose el ciclo que (para $a = a_H$) tenía período T_a , a través de una bifurcación nodo-silla inversa. Por otro lado, el ciclo que (para $a = a_H$) tenía período T_b , persiste y sigue disminuyendo su período hasta que coincide con el ciclo estable de la bifurcación de Hopf, cuando $a = 8.1$.

Con referencia a los ciclos simétricos, en el capítulo 2 se señaló que existe una órbita simétrica de período mucho mayor que el de la órbita periódica principal asimétrica. Esta órbita surge debido a una bifurcación nodo-silla y coexiste con los atractores asimétricos y con el Doble Scroll en un amplio rango del parámetro a . En la figura 4.4 se grafica el wiggle que genera dicha órbita¹⁷.

La coexistencia de dos órbitas periódicas simétricas (figura 2.1c), para un mismo valor del parámetro está, por lo tanto, justificada por el “codo” de la izquierda del wiggle simétrico (verde): el de mayor período (T_A para $a = a_H$) y exterior en el esquema 2.1c es inestable y el de menor período (T_B para $a = a_H$) es de tipo silla.

¹⁶ Se recuerda que la órbita homoclínica es de período infinito.

¹⁷ Los períodos de los wiggles asimétrico y simétrico, en la figura 4.4 se han esquematizado en diferentes escalas.

A medida que el valor de a aumenta, el ciclo tipo silla va disminuyendo su período y se cierra sobre el Atractor de Rössler cuando $a < a_{NDS}$ o hacia el Atractor de Chua, cuando $a > a_{NDS}$ (provocando su destrucción), mientras que el ciclo inestable, se convierte en un ciclo tipo silla, a través de una duplicación de período. Cuando $a > a_H$, se observa que el ciclo de mayor período se convierte nuevamente en un repelor, a través de una duplicación de período inversa, para posteriormente desaparecer a través de una bifurcación nodo-silla inversa. Sin embargo, persisten otros ciclos inestables de período mucho menor (que no se dibujan en la figura 4.4), y que en la figura 4.3, están representados por los puntos fijos a la derecha del punto H.

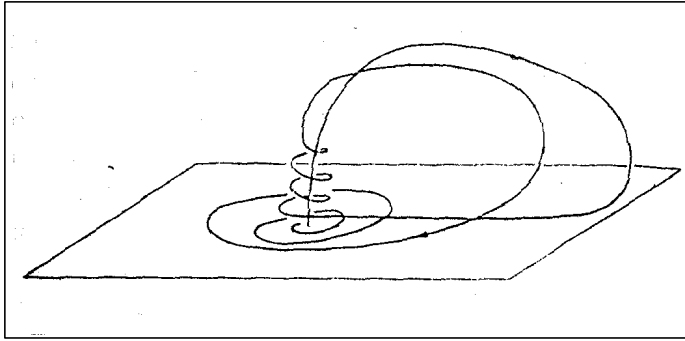


FIG. 4.5 : Órbita homoclínica subsidiaria [19].

para el ciclo límite de Hopf en la figura 7b, los ciclos simétricos pierden su estabilidad, también, a través de una pérdida de simetría [20]. Para un valor del parámetro próximo a aquel que señala una duplicación de período para la órbita periódica principal simétrica, surge una órbita periódica subsidiaria asimétrica alrededor del punto P, que a su vez tiene un wiggle alrededor de otro valor de a , para el cual se observará una órbita homoclínica subsidiarias¹⁸ (fig.4.5). Algunas de estas órbitas fueron encontradas por Khibnik et al [8] más allá del valor del parámetro para el cual existe la órbita homoclínica principal.

Hemos, entonces, explicado la existencia de las órbitas periódicas principales (asimétricas y simétricas) del Circuito de Chua, a través del mapa definido en el capítulo 3. Sin embargo, es importante señalar que ambos wiggles se dan alrededor de un mismo valor de a , por lo que la misma órbita homoclínica principal se asocia a ciclos asimétricos y simétricos. Pero existe una diferencia entre ambos comportamientos. Mientras los duplicaciones de período, como la señalada

¹⁸ Las órbitas homoclínicas subsidiarias se presentan para valores de los parámetros muy próximos a los de la órbita homoclínica principal [19]: Cuando el flujo se aleja del plano estable siguiendo la variedad inestable, se reinyecta en una región próxima al origen (girando alrededor de $E^U(P_0)$ y alejándose de $E^S(P_0)$), antes de reinyectarse nuevamente, en el plano estable.

CAPITULO 5. ATRACTOR DE RÖSSLER¹⁹.

El pasaje espiral-tornillo en el Atractor de Rössler (ver figura 2.2c) y otros cambios posteriores de la dinámica del Circuito de Chua, antes que se produzca el nacimiento del Doble Scroll, están asociados a la presencia de órbitas homoclínicas alrededor de los puntos P (P_+ ó P_-). Las bifurcaciones homoclínicas asociadas a esas órbitas, son de tipo Shilnikov para todos los valores positivos de los parámetros a y b , por lo que surgen ciclos inestables o tipo silla (ver apéndice IV)²⁰.

En este capítulo desarrollamos un análisis diferente al realizado en relación a la órbita homoclínica principal del capítulo anterior: Trabajando con el mapa unidimensional que definiéramos en el capítulo 3, observamos que la transición espiral - tornillo del Atractor de Rössler (aplicado al sistema (1.1)), está asociada a ciclos límites que dan n vueltas alrededor de los puntos de equilibrio P. Un estudio similar, aplicado al Nacimiento del Doble Scroll, nos permitirá (en el capítulo siguiente) sacar algunas conclusiones acerca de la naturaleza de ese atractor.

5.1 CAMBIOS EN LA DINAMICA.

5.1.1 DESCRIPCION.

En la sección 2.1 se señalaban gráficamente, los diferentes cambios que sufría la dinámica: Cuando se aumenta el valor del parámetro a , el sistema (1.1), presenta una bifurcación de Hopf, luego de la cual, se observan cascadas de duplicación de período (directa e inversa) que lo conducen (en una ruta subarmónica) a un caos débil. También se observan ventanas de periodicidad de ciclos de período impar. Estos cambios de la dinámica, se dan en el marco del Atractor de Rössler de tipo espiral.

Un posterior aumento del valor de a , provoca el pasaje espiral-tornillo en el Atractor de Rössler. Comparando las trayectorias dibujadas en la figura 5.1, se observa que, cuando el atractor tiene forma espiral, la influencia de la variedad inestable del origen, es mayor que cuando se está en presencia del Tornillo de Rössler: En este último caso, el flujo antes de ascender (influenciado por la variedad inestable de P_0), gira alrededor de dicha variedad, en la dirección paralela a la variedad estable.

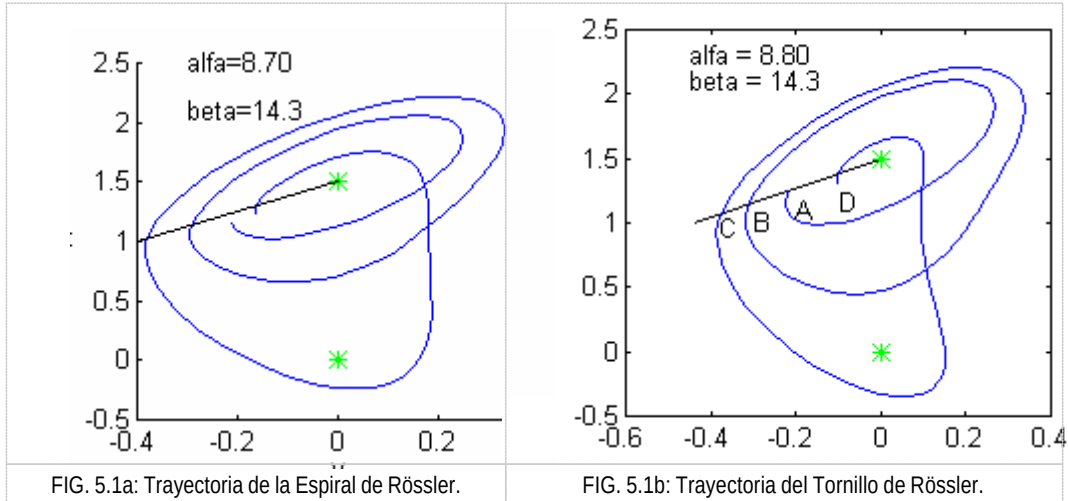
Si bien el cambio en el flujo es muy sutil, existen valores de los parámetros a y b para los cuales se constata la presencia de una órbita homoclínica alrededor del punto P, en el Tornillo de Rössler [5]. Y dicha órbita no puede observarse para los valores de los parámetros para los cuales es observable la Espiral de Rössler.

¹⁹ El sistema de ecuaciones presentado originalmente por Rössler [3] es de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= bx - cz + xz\end{aligned}$$

²⁰ La condición de resonancia s_4 (ec.4.1) ($d > \frac{1}{2}$) para estos puntos esta dada por la ecuación:

$$b < -\frac{1}{b} = -3.5$$



Posteriormente al pasaje espiral-tornillo, el atractor asimétrico sufre otros cambios en su dinámica²¹. Y cada uno de esos cambios, motiva la presencia de una órbita homoclínica alrededor del punto P [5].

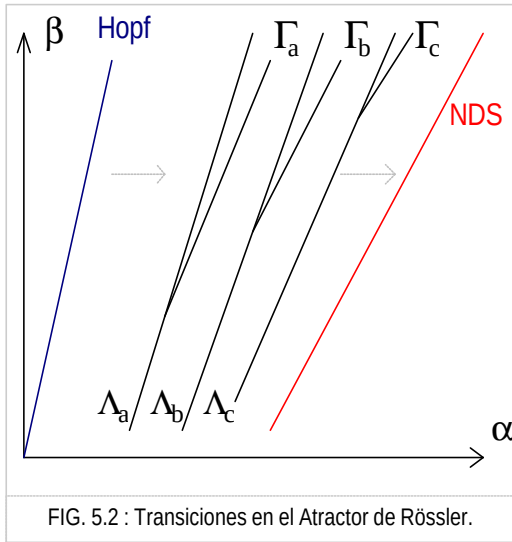


FIG. 5.2 : Transiciones en el Atractor de Rössler.

En la figura 5.2 se esquematiza, en el plano (a, b) de los parámetros, algunos de estos cambios. Los mismos son observables en el sistema (1.1), en un rango de valores de los parámetros, muy estrecho. Luego de la bifurcación de Hopf, se observa el primer cambio de la dinámica Λ_a , correspondiente al pasaje espiral-tornillo. A la derecha de la línea que señala el lugar geométrico en el plano (a, b) , para el cual se produce la transición, se observa la presencia de la curva Γ_a , que indica los valores de los parámetros, para los cuales puede encontrarse una órbita homoclínica de tipo Shilnicov alrededor del punto P.

Pero antes de producirse el Nacimiento del Doble Scroll, se pueden observar, también, otros pasajes (Λ_b , Λ_c , etc.), cada uno de los cuales está asociado al nacimiento de una curva (Γ_b , Γ_c , etc.) que indica que

pueden encontrarse (para valores precisos de a y b) otras órbitas homoclínicas, que también unen la variedad estable e inestable del punto P.

²¹ Si seguimos aumentando el valor de a , se observará que existen trayectorias que giran aún más, alrededor de la variedad inestable del origen (antes de ascender, influenciadas por ella).

5.1.2 ESTUDIO CUANTITATIVO.

En esta sección nos proponemos analizar, los fenómenos más importantes asociados a la primer transición en la dinámica del Atractor de Rössler.

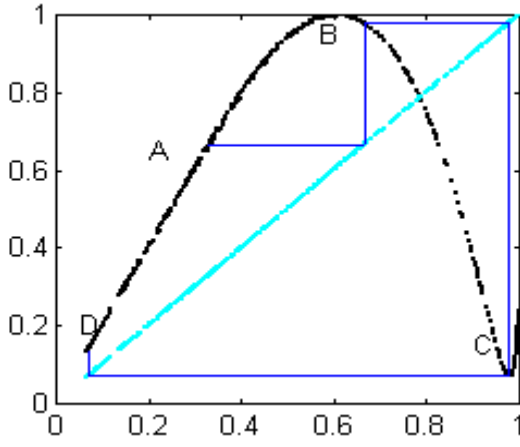


FIG. 5.3 : Mapa del Tornillo de Rössler

Para ello, consideramos el mapa de la figura 5.3, correspondiente al flujo dibujado en la figura 5.1b. En dicho mapa se distinguen tres regiones diferentes: una región lineal (asociada a la rotación del flujo alrededor del punto P, sobre el plano $E^u(P)$), una región cuadrática alrededor del máximo del mapa (que representa el plegamiento que tiene el flujo una vez que está en D_0 , para volver a inyectarse en D_1) y una región alrededor del mínimo (que representa la reinyección del flujo en las proximidades del punto fijo P, una vez que hubo dado un giro alrededor de la variedad inestable del origen).

Si el parámetro b permanece constante y se varía a , se observa que la presencia del mínimo está asociada a la transición espiral-tornillo en el Atractor de Rössler [21]: Cuando se está en presencia del atractor tipo espiral, el mapa es un mapa de

Feigenbaum [22] (ver apéndice I); al aumentar a , el mínimo va formándose hasta producirse la transición, justo cuando el mínimo coincide con el punto de mayor absisa en el mapa.

Si se sigue aumentando el valor del parámetro, se podrán observar otros mínimos relativos (fig.3.4a₂) que representan sucesivas transiciones Λ del atractor hacia otros estados de la dinámica²².

Analicemos con detalle la transición espiral-tornillo, observando los cambios del mapa de la figura 5.3., el cual puede representarse analíticamente a través de una función diferente en cada una de las regiones antes mencionadas [6]:

$$f(r) = \begin{cases} sr \equiv f_1(r) \\ e_m - c_m (r - r_m)^2 \equiv f_m(r) \\ \left[s_m^2 (r - r_m)^2 + e_m^2 \right]^{\frac{1}{2}} \equiv f_m(r) \end{cases} \quad (5.1)$$

donde (r_m, e_m) y (r_m, e_m) representan las coordenadas del máximo y mínimo en el mapa, respectivamente²³. La situación $e_m = 0$ representa a la órbita homoclínica Γ_a asociada a la transición Λ_a , ya que en ese caso, la imagen del mínimo es el punto P, como se observó en la sección 3.3 (figura 3.2c₁). La transición Λ_a se produce cuando $d = e_m - r_m = 0$ (situación en la cual, el mínimo del mapa está en el extremo superior de su intervalo de definición)⁵. Podemos, entonces, definir un plano (e, d) de nuevos parámetros (llamaremos simplemente e a la ordenada del mínimo), donde observar algunas características del sistema, a medida que la altura y posición del mínimo del mapa varían²⁴.

En relación con el mapa y los parámetros definidos, podemos encontrar el lugar geométrico de dos familias de órbitas periódicas (n -ciclos) superestables²⁵. Una de las familias está determinada por el hecho

²² Gaspard y Nicolis [5] señalan estas transiciones en el plano de parámetros (a, c) de las ecuaciones de Rössler tradicionales.

²³ Obsérvese que de acuerdo a la definición del map (ec. 3.1), $e_m = 1$ cuando aún no se ha producido el Doble Scroll. Pero como este análisis puede aplicarse, también, en el caso en que ese atractor sea observable, preferimos mantener, en la expresión analítica del mapa, la altura del máximo como una variable.

²⁴ En la siguiente sección se muestran algunos de estos resultados en el plano (a, b) de parámetros del sistema (1.1).

²⁵ Llamamos órbita periódica superestable a aquella que pasa por uno de los extremos relativos del mapa.

de que el mínimo del mapa pertenece a las órbitas periódicas de la familia, mientras que la otra familia está determinada por los ciclos que pasan por el máximo del mapa.

Entonces, teniendo en cuenta la ecuación 5.1, los n -ciclos generados por el mínimo del mapa verifican la ecuación:

$$f^{(n)}(r_m) = f_M(f_1^{(n-2)}(f_m(r_m))) = e_M - c_M(s^{n-2}e - r_M)^2 = r_m = e_M - d \quad (5.2)$$

ya que el n -ciclo en el mapa se grafica partiendo del mínimo del mapa, mapeándose $(n-2)$ veces en la región lineal, una vez en la región del máximo del mapa y regresando al mínimo.

Si asumimos que los parámetros s , r_M y c_M son independientes de ε y δ , obtenemos como resultado en el plano (e, d) parábolas $d(e)$ cuyos mínimos (e_n) se producen para $d = 0$:

$$d(e) = c_M(s^{n-2}e - r_M)^2 \quad e_n = \left[r_M \pm \left(\frac{d}{c_M} \right)^{\frac{1}{2}} \right] s^{2-n} \quad (5.3)$$

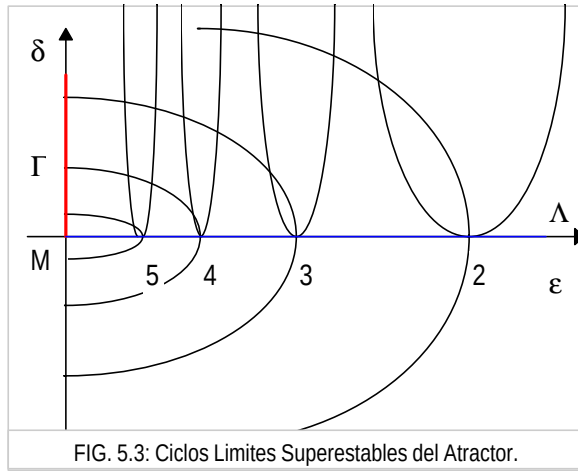


FIG. 5.3: Ciclos Limites Superestables del Atractor.

En la figura 5.4 se esquematizan estos resultados. Cada uno de los brazos de las parábolas (izquierdo y derecho) corresponde a un ciclo superestable que pasa por el mínimo del mapa y que pasa, al cabo de $(n-2)$ vueltas alrededor del punto P (región lineal del mapa) se mapea en un punto cercano al máximo del mapa, a la izquierda o derecha del mismo, respectivamente.

Por otro lado, la familia asociada al máximo del mapa, verifica la ecuación:

$$f_1^{(n-2)}(f_m(f_M(r_M))) = s^{n-2} \left[(s_m d)^2 + e^2 \right]^{\frac{1}{2}} = r_M \quad (5.4)$$

puesto que el ciclo parte del máximo, se mapea en la región próxima al mínimo del mapa (a la izquierda o derecha de este), para regresar al punto de partida, al cabo de $(n-2)$ vueltas alrededor del punto P (en la región lineal del mapa).

El lugar geométrico correspondiente a estas órbitas superestables está dado por elipses concéntricas al punto M de coordenada $(0,0)$ del plano (e, d) :

$$e^2 + (s_m d)^2 = (r_M s^{2-n})^2 \quad (5.5)$$

La intersección de ambas familias se da en la línea $d = 0$, correspondiente a la curva de transición espiral-tornillo del Atractor de Rössler. En esos puntos, los n -ciclos son doblemente superestables, ya que sus trayectorias pasan por el máximo y el mínimo del mapa. El punto de intersección superior, está relacionado con el fenómeno de biestabilidad, para el cual dos órbitas periódicas de igual período coexisten en un mismo atractor [21].

Un análisis más detallado del plano (e, d) permite calcular el lugar geométrico donde se producen bifurcaciones tangentes (t) que generan los n -ciclos, así como las curvas donde esas órbitas sufren una duplicación de período (h). Las relaciones que deben cumplir los parámetros ε y δ , para generar estas curvas, son:

$$f^{(n)}(r) - r = 0 \quad \frac{df^{(n)}}{dr}(r) = \begin{cases} +1 & (t) \\ -1 & (h) \end{cases} \quad (5.6)$$

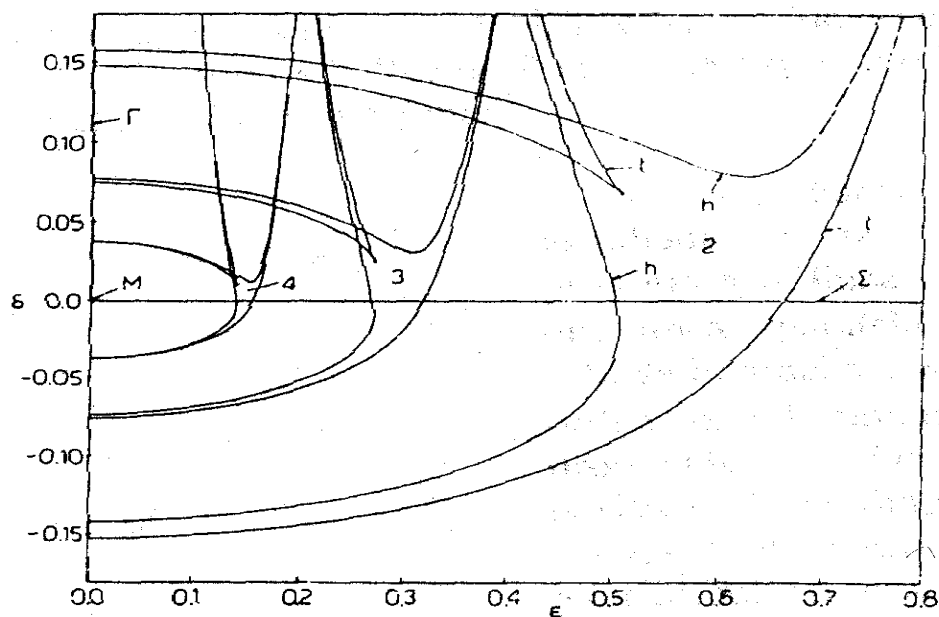


FIG. 5.5 : Ciclos superestables, bifurcaciones tangentes (t) y duplicaciones de período (h) [6].

La figura 5.5 muestra el lugar geométrico de las curvas calculadas con las condiciones (5.6), alrededor de las parábolas y elipses que se calcularon para los ciclos superestables. Las curvas (t) y (h) determinan para cada n -ciclo, una estructura de tipo anzuelo [21] que está asociada no sólo a la bifurcación que sufre la órbita homoclínica alrededor del punto P_+ ó P_- , sino también, a bifurcaciones homoclínicas de órbitas alrededor del punto P_0 , como se verá en el capítulo siguiente. En particular, la curvas (t) próximas al punto de intersección de las dos familias de ciclos superestables, presentan un punto cúspide (un punto de inflexión en el plano de parámetros) donde la bifurcación tangente genera y destruye los n -ciclos que tienen sus puntos fijos próximos al máximo y mínimo del mapa, respectivamente²⁶.

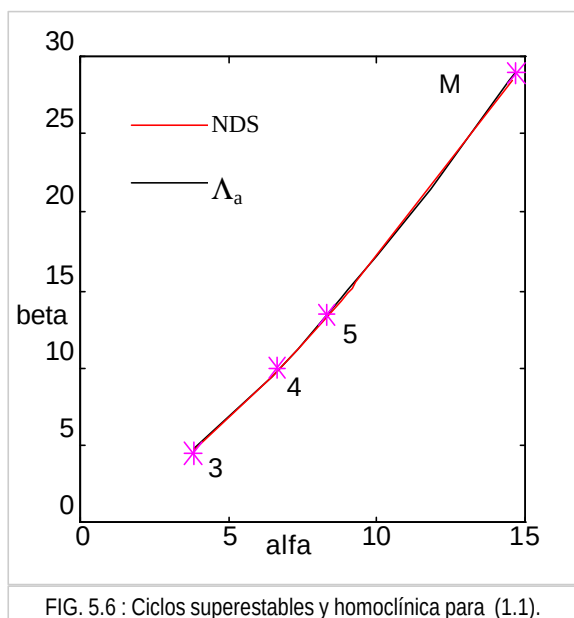
²⁶ En este trabajo no se han estudiado los detalles del fenómeno de biestabilidad e histéresis que se observa en esta zona.

5.2 TORNILLO DE RÖSSLER EN EL CIRCUITO DE CHUA.

Hasta aquí se ha trabajado en el plano (e, d) o sea que se han utilizado como parámetros la ordenada y absisa del mínimo del mapa. Como es nuestro interés determinar la dinámica en función de los parámetros (a, b) , presentamos aquí algunos de los datos computacionales que determinamos para el pasaje espiral-tornillo en el sistema (1.1)²⁷.

TABLA I.	α	β
Ciclo 3	3.8	4.4788
Ciclo 4	6.65	9.8629
Ciclo 5	8.32	13.37
Punto M	14.7	29.0319

En la tabla I hemos explicitado los valores de los parámetros, para los cuales se ha verificado computacionalmente la existencia de la transición espiral-tornillo, la órbita homoclínica asociada (punto M de la figura 5.3) y ciclos de período 3, 4 y 5 que nacen para los mismos valores de parámetros para los cuales se ha producido el mínimo del mapa. En la figura 5.6 se grafican los puntos hallados. Pudo observarse que los 3-ciclo y 4-ciclo son estables, mientras que el 5-ciclo es inestable²⁸.



Vale hacer notar, que la región estudiada es un finísimo corredor muy próximo a la línea NDS: La transición Λ_a es una línea “paralela” a NDS y la línea de órbitas homoclínicas Γ_a no interseca NDS: la ordenada del mínimo del mapa cuando se ha producido el Doble Scroll siempre es positiva. Esto implicaría que no existen órbitas homoclínicas alrededor de P en el interior del Atractor de Chua.

²⁷ En el siguiente capítulo se presentarán resultados más completos, en el marco de los otros cambios que sufre la dinámica.

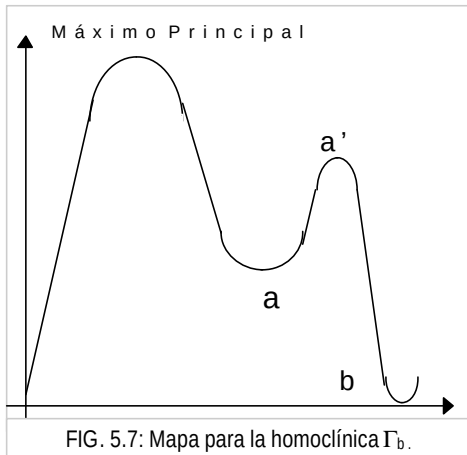
²⁸ Nótese que los 3-ciclo y 4-ciclo nacen para valores de $a < 7$, mientras que el 5-ciclo lo hace a la derecha de s_4 (ver figura 4.1).

5.3 GENERALIZACIÓN.

Como se mencionó en la sección 5.1, a medida que crece el valor de a , se producen otros máximos y mínimos relativos (antes del Nacimiento del Doble Scroll) y estos extremos relativos indican otras transiciones Λ , algunas de ellas asociadas a órbitas homoclínicas Γ , alrededor del punto P.

En ese caso, los n -ciclos superestables pasarán por los extremos relativos menores, que se encuentran a la derecha del mínimo principal (fig. 3.4a₂) ó por el máximo del mapa (quien en todos los casos cumple la misma función: reinyectar el flujo desde la región D_0 a la región D_1 una vez que este giró $(n-2)$ veces alrededor del punto P, pegado a su variedad inestable.

Estas nuevas transiciones, entonces, pueden ser analizadas como en el caso anterior, modulando tres regiones del mapa e “ignorando” la presencia del primer mínimo en el cálculo de los n -ciclos ya que los puntos fijos del mapa que representan un ciclo límite asociado al segundo mínimo, no se localizan en la región del primer mínimo (que representa el pasaje espiral-tornillo).



La figura 5.7 muestra un esquema del mapa que se obtendría cuando los valores de a y b son próximos al punto de intersección entre Λ_b (transición desde el tornillo de Rössler a otro atractor caótico) y Γ_b (línea que señala la presencia de una órbita homoclínica alrededor de P, asociada a esa transición). El cambio cualitativo en la función f que define el mapa, en la región próxima al punto H (definido en el capítulo 3), provoca cambios en los wiggles asociados a la órbita homoclínica principal. Glendining y Sparrow [4] señalan la existencia de este tipo de órbitas homoclínicas en el Atractor de Lorenz [23]. Para el Circuito de Chua no se han obtenido datos de este hecho, dado que los valores de los parámetros a y b , para los cuales se obtendría este mapa, están muy lejos de la zona donde hemos concentrado nuestro trabajo.

Por otro lado, la región del mapa de la figura 5.3, próxima a los máximos relativos menores, también puede aproximarse mediante una función similar a la tercer función de la ecuación (5.1). Pero, el cambio de concavidad implica que el lugar geométrico (en el plano de parámetros) de los ciclos límites superestables asociados al máximo del mapa (equivalente a ec.5.5) estaría dado por hipérbolas (en lugar de por elipses concéntricas al punto M).

Asimismo, es imposible a través del mapa definido en la ecuación (3.1), determinar la existencia de una órbita homoclínica alrededor de P, asociada a la transición que generaría la creación del primer máximo relativo menor a' , ya que la ordenada de dicho máximo relativo no puede anularse, sin provocar discontinuidades en el mapa en la región del mínimo principal²⁹. En otras palabras, si existen órbitas homoclínicas asociadas al máximo a' , no son observables en la región de parámetros para los cuales es razonable la definición del mapa. Por esa razón esta transición no fue representada en el esquema de la figura 5.1, aunque genera cambios en la dinámica, como se verá en el capítulo 6.

²⁹ Obsérvese que de ser así, el mínimo a se mapearía por debajo del eje de las abscisas.

CAPITULO 6. ORBITAS HOMOCLÍNICAS EN EL DOBLE SCROLL.

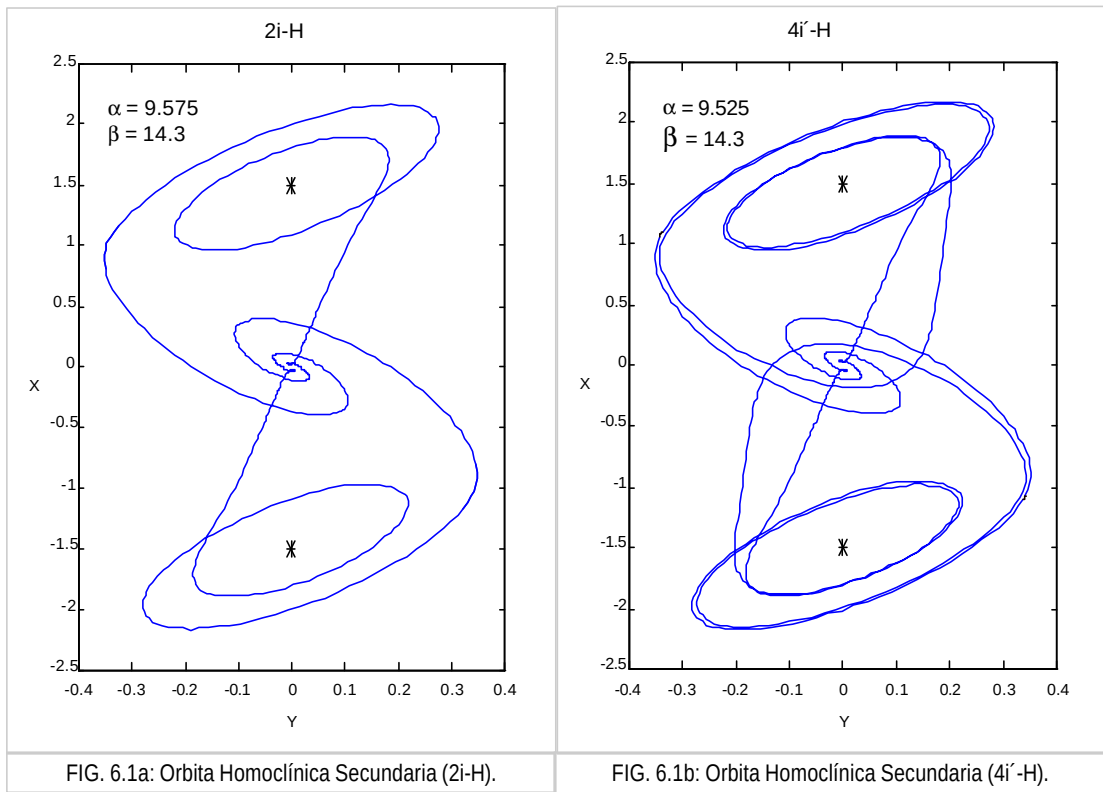
En los capítulos anteriores, hemos desarrollado las herramientas que utilizaremos en este capítulo, para analizar la estructura del Atractor de Chua y observar cuáles son los fenómenos que están asociados su nacimiento.

Trabajando con el mapa unidimensional, determinamos los valores de a y b para los cuales existen órbitas homoclínicas simétricas (que surgen con el Doble Scroll) y cuáles son las órbitas periódicas asociadas a las bifurcaciones de dichas órbitas homoclínicas.

En las secciones 6.1 y 6.2 mostramos los resultados obtenidos e interpretamos los mismos, a la luz de lo estudiado en los capítulos 4 y 5. En la secciones 6.3 y 6.4 presentamos los distintos cambios de estructura que presenta el sistema (1.1), con el fin de observar que pueden identificarse diferentes fenómenos críticos que le dan al Atractor de Chua un caracter caótico.

6.1. HOMOCLINICAS SECUNDARIAS.

En la figura 6.1 se dibujan dos órbitas homoclínicas halladas para valores de los parámetros donde se observa el atractor Doble Scroll. En ellas puede observarse la inyección del flujo sobre el plano $E^S(P_0)$ (por lo que estas órbitas homoclínicas conectan la variedad estable e inestable del origen) después de dar dos o cuatro vueltas alrededor de los puntos $P_{\pm}$.



Glendinning y Sparrow [4] analizan la situación para la ecuación de Arneodo³⁰ y el nombre que dan a estas órbitas, es el de homoclínicas secundarias, destacando que las mismas tienen un carácter completamente distinto que el de las homoclínicas subsidiarias de la órbita homoclínica

³⁰ La ecuación de Arneodo [24] es de la forma: $\ddot{x} + \ddot{x} + b\dot{x} - cx + x^2 = 0$ y presenta dos puntos fijos: uno en el origen y el otro para $x = c$ y las características de las variedades locales de estos puntos son iguales a las de los puntos fijos P_0 y P_+ (respectivamente) de las ecuaciones (1.1).

principal (ver figura 4.5), ya que las vueltas de las órbitas homoclínicas secundarias no pasan cerca del plano $E^S(P_0)$, como en el caso de aquellas.

6.1.1 CASCADA DE DUPLICACION DE PERIODO.

Planteamos una primer aproximación al problema, considerando el valor del parámetro b fijo y variando el valor del parámetro a . En la sección 6.2 esquematizaremos la situación para el plano (a, b) .

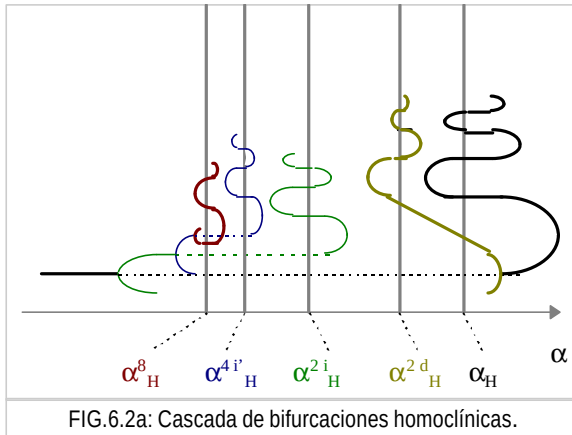


FIG.6.2a: Cascada de bifurcaciones homoclínicas.

Como se comentó en el capítulo 4, el surgimiento de un ciclo límite alrededor de los puntos $P_{\pm}$, debido a una bifurcación de Hopf, generará un wiggle alrededor de un valor del parámetro $a_H \cong 10.98$. No obstante, para valores menores del parámetro, se observa otras homoclínicas como las de la figura 6.1. En la figura 6.2a se esquematiza este comportamiento: Cuando a es pequeño y el sistema está controlado por el Atractor de Rössler (espiral), se observará una duplicación de período a través de la cual el ciclo límite principal (dibujado en negro), pierde estabilidad. Si a

partir de este momento, computamos el comportamiento del 2-ciclo emergente (verde), encontraremos un wiggle (alrededor de un nuevo valor α_H^{2i}), generado por este 2-ciclo (que llamaremos 2i-ciclo) el cual puede considerarse como órbita periódica principal de la bifurcación que sufre la órbita homoclínica secundaria 2i-H, que se grafica en la figura 6.1a.³¹

A su vez, el 2i-ciclo que estamos considerando como nueva órbita periódica principal, volverá a perder estabilidad a través de una segunda duplicación de período, de donde surge un 4i'-ciclo (azul) que, al computar su comportamiento, protagonizará un wiggle alrededor de $\alpha_H^{4i'} < \alpha_H^{2i}$, para el cual se verifica la existencia de una nueva órbita homoclínica secundaria 4i'-H (graficada en la figura 6.1b).

Como el sistema sufre una cascada de duplicaciones de período, cada uno de estos $2n$ -ciclos izquierdos generados en esa cascada, tendrá un wiggle alrededor de un valor del parámetro a_H^{2n} para el cual existirá una órbita homoclínica secundaria. Suponemos que el punto de acumulación de estas órbitas es el mismo que el punto de acumulación de la cascada de duplicación de período.

Glendinning y Sparrow observan estas órbitas homoclínicas secundarias, en las ecuaciones de Arneodo, en una región de los parámetros para la cual el sistema ya se ha “escapado al infinito” [4]: El sistema de Arneodo presenta sólo dos puntos fijos y las órbitas homoclínicas alrededor del origen, no son simétricas. En las ecuaciones de Chua, al ser el sistema simétrico respecto del origen, las órbitas homoclínicas son simétricas y lo que Glendinning y Sparrow llaman “escape al infinito”, corresponde al Nacimiento del Doble Scroll.

Adicionalmente, en el sistema de Arneodo, debemos señalar que los ciclos asociados a la bifurcación que sufren las órbitas homoclínicas secundarias, son asimétricos. En el sistema de Chua se hallaron ciclos asimétricos y simétricos asociados a estas bifurcaciones: Los primeros dan n -vueltas alrededor de uno de los puntos fijos no triviales (ver figura 2.2b), mientras que los segundos dan n -vueltas incompletas alrededor de uno de los puntos fijos (P_+ o P_-), pasan hacia el otro semiespacio y repiten la misma trayectoria alrededor del otro punto fijo (P_- o P_+) (ver figura 2.2e). Se ha comprobado computacionalmente que estas órbitas asimétricas y simétricas generan

³¹ Como ya se señalara en el capítulo anterior, el carácter “i” o “d” de un ciclo (u homoclínica) está dado por la ubicación a la derecha o izquierda del punto fijo del n -ciclo que está cerca del máximo del mapa.

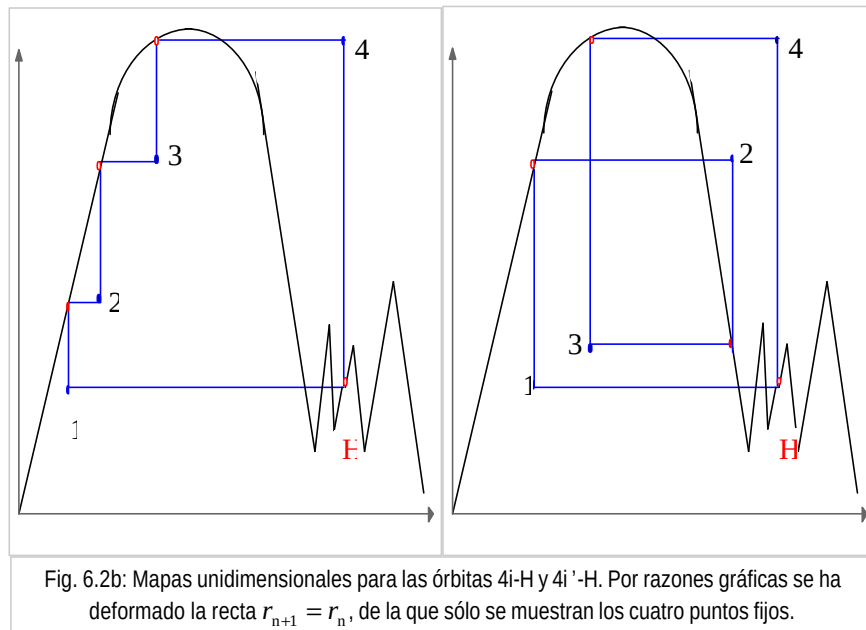
wiggles alrededor de un mismo valor de α , como en el caso de las órbitas periódicas principales asimétrica y simétrica del capítulo 4.

Siguiendo con el esquema de la figura 6.2a, observamos que la órbita periódica principal (negra) (que genera un wiggle alrededor del valor a_H), vuelve a tener estabilidad definida (inestable) para $a > a_H^{32}$. El reestablecimiento de la estabilidad (a través de una duplicación de período inversa) se debe a la existencia de un segundo 2-ciclo (que llamamos 2d-ciclo (amarillo)) que tiene a su vez, un wiggle alrededor de α_H^{2d} , para el cual se constata la presencia de una segunda homoclínica (2d-H). En nuestro trabajo no determinamos computacionalmente la presencia de la órbita homoclínica 2d-H, puesto que a_H^{2d} está mucho más allá del Nacimiento del Doble Scroll. Estimamos que para a_H^{2d} ya se ha producido la Muerte del Doble Scroll.

6.1.2 OTRAS ORBITAS HOMOCLÍNICAS SECUNDARIAS.

Además de las órbitas homoclínicas secundarias que se corresponden con la cascada de duplicación de período que sufre el sistema (1.1), existen otras órbitas homoclínicas secundarias. En las siguientes secciones concentraremos el análisis en órbitas homoclínicas que, partiendo de la variedad inestable del punto P_0 , dan tres vueltas de radio creciente, alrededor del punto P, antes de reinyectarse en la variedad estable del punto P_0 , nuevamente³³.

Pero, también existen órbitas de tipo 4-H, 5-H, etc, a las cuales les llamaremos en forma genérica n -H. Vale señalar, que la órbita 4i-H, es distinta de aquella que mencionamos en la sección anterior como 4i'-H. En el esquema de la figura 6.2b se dibujan ambas trayectorias sobre un mapa unidimensional.



³² Llamamos “de estabilidad definida” a las órbitas periódicas que son totalmente estables o inestables.

³³ Llamamos a estas órbitas 3i-H y 3d-H y sus flujos se grafican en la figura 6.3 de la siguiente sección.

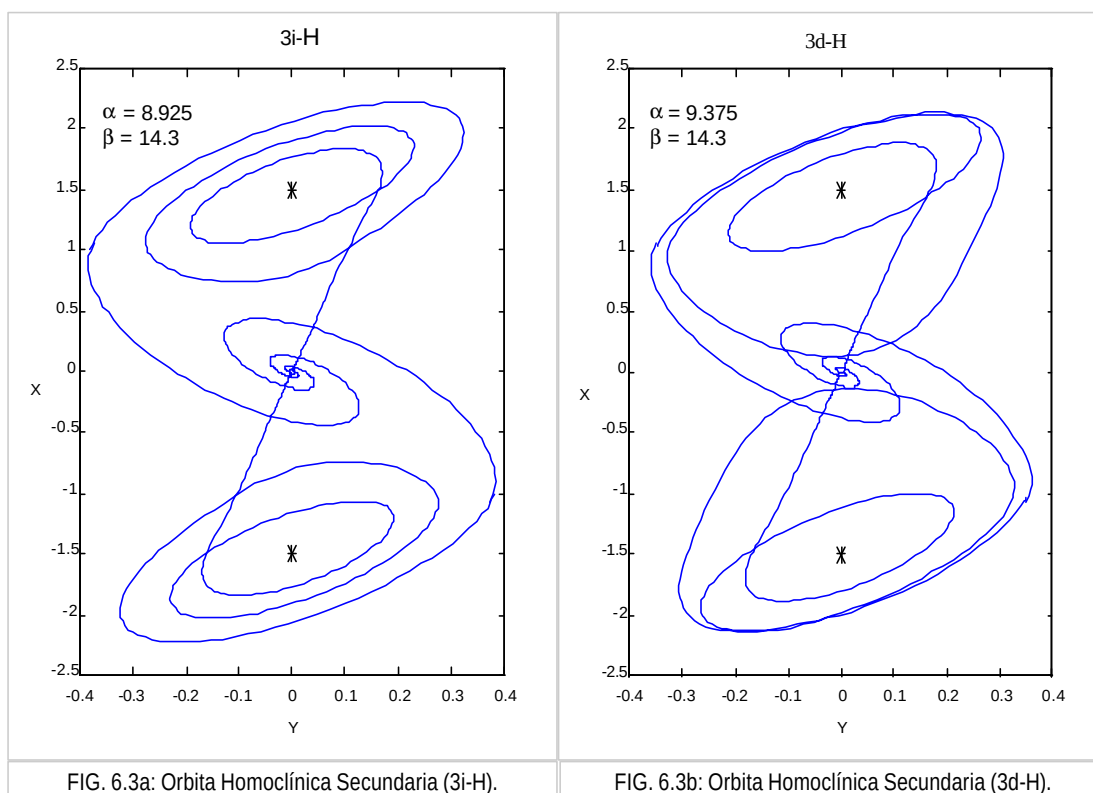
Considerando la primer figura, observamos que el punto H se mapea dos veces en la región lineal del mapa y una vez en la región del máximo principal, para volver al punto H³⁴.

La segunda figura, muestra al punto H mapeándose (sólo una vez) en la región lineal del mapa. El siguiente punto fijo se observa en la rama que une el máximo principal con el primer mínimo relativo, y su imagen se observa en la región del máximo principal (a la izquierda de este). Por último, el ciclo regresa al punto H³⁵.

Si con la imaginación (en la segunda figura) unimos el primer y tercer punto fijo y el segundo y cuarto punto fijo, obtendremos el esquema de la órbita 2i-H, por lo que la trayectoria señalada como 4i'-H, no es otra cosa que la duplicación de período de la órbita 2i-H, como se señalaba en la sección 6.1.1. Pero no podemos aplicar una transformación del mismo estilo, a la curva 4i-H. Existen, también, curvas 4d'-H y 4d-H con diferencias equivalentes.

6.1.3 ORBITAS HOMOCLÍNICAS SECUNDARIAS 3-H.

La figura 6.3 muestra dos órbitas homoclínicas secundarias de período 3, observables para valores de los parámetros correspondientes al Atractor de Chua.

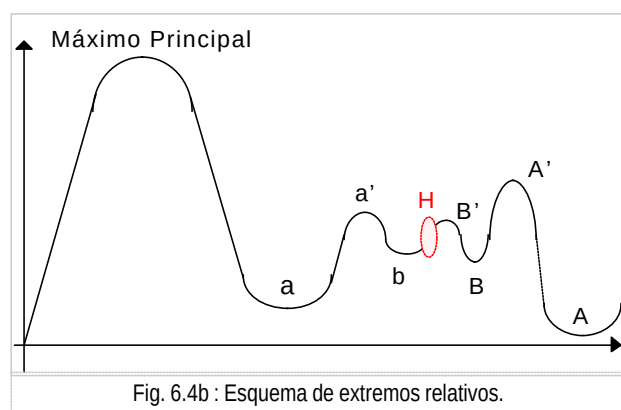
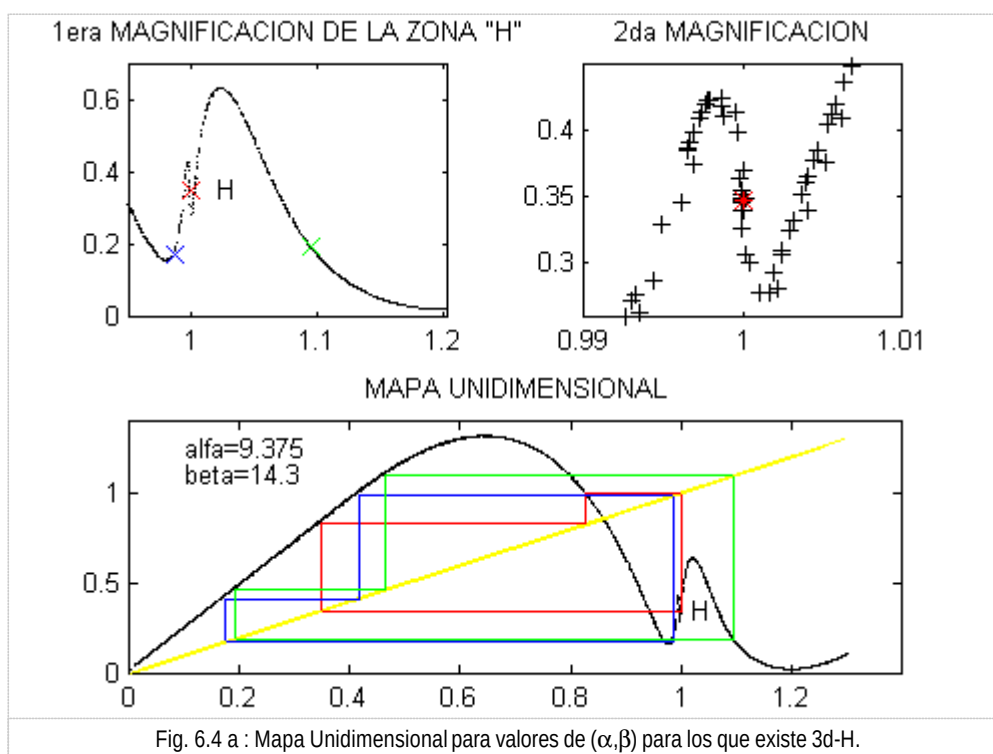


Estudiamos la bifurcación global que sufren estas órbitas homoclínicas, cuando se varía el parámetro α . Para ello, observamos la figura 6.4, donde se representa el mapa unidimensional definido en el capítulo 3. En la figura 6.4a se señala un 3d-ciclo (rojo) que pasa por el punto H

³⁴ En el espacio (x,y,z) el flujo de 4i-H, partiendo del punto H₊, recorre el espacio por debajo del plano estable del punto P₀, incide sobre la recta P.G. en un punto cercano al punto P₋, da tres vueltas de radio creciente (alrededor de este punto, sobre su variedad inestable) y vuelve a mapearse sobre el punto H. (simétrico al punto de partida).

³⁵ La trayectoria en el espacio (x,y,z) 4i'-H (ver figura 6.1b), parte del punto H₊, recorre el espacio por debajo del plano estable del punto P₀, incide sobre la recta P.G. en un punto no muy cercano al punto P₋, da dos vueltas de radio creciente alrededor de este punto, pasa por la región D₀, vuelve a incidir en un punto de la recta P.G. y al cabo de una tercer vuelta de radio creciente (alrededor del punto P₋ y sobre su variedad inestable), se mapea en el punto H₋.

(considerado aquí como aproximación de 3d-H de la figura 6.3b) así como dos 3i-ciclos: uno asimétrico (azul) y otro simétrico (verde), que se observan para un mismo valor de los parámetros³⁶.



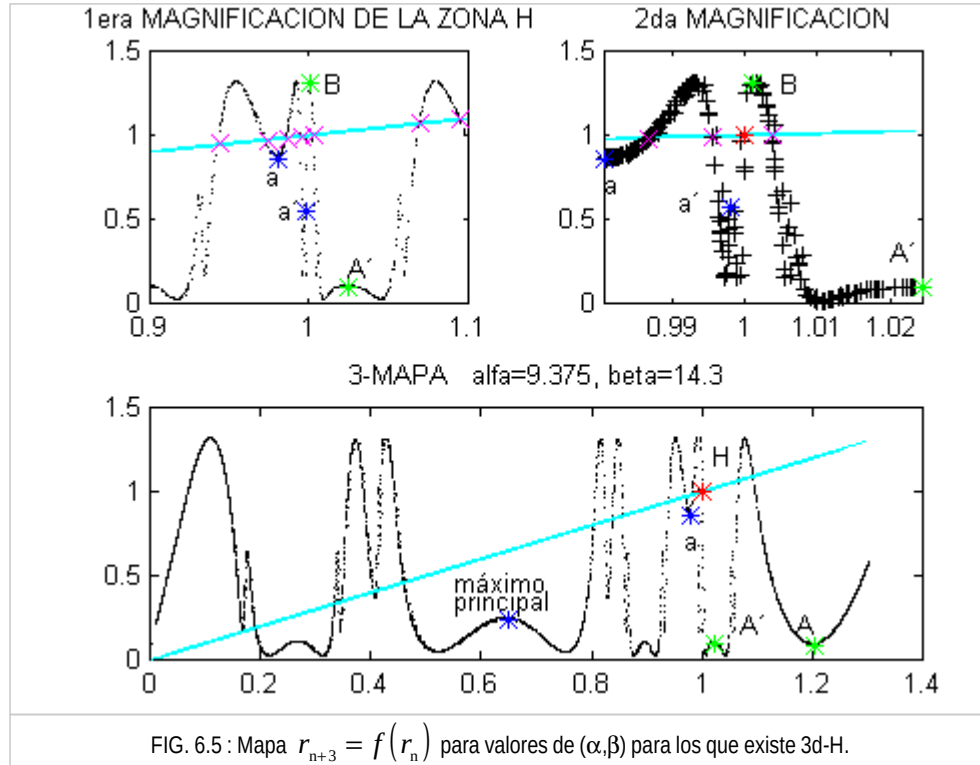
En la figura 6.4b se ha esquematizado el mapa de la figura 6.4a, de modo tal de rotular los máximos y mínimos relativos que se observan cerca del punto H. Los mismos adquieren vital importancia cuando se desea observar la pérdida de ciclos a través de bifurcaciones nodo-silla asociadas a la bifurcación global que sufren la órbita homoclínica 3i-H y 3d-H. Así, llamamos con letras minúsculas a los mínimos que se observan a la izquierda del punto H: la letra “a” designará al mínimo que

se produce en el pasaje espiral-tornillo del Atractor de Rössler, la letra “b” corresponde al siguiente mínimo, cuando aumentamos la absisa, etc. Designamos con letras mayúsculas a los mínimos que se observan a la derecha del punto H: la letra “A” corresponde al mínimo que está más alejado del punto H y a medida que nos acercamos a dicho punto (disminuyendo el valor de la absisa), tendremos los mínimos “B”, “C”, etc. Los máximos son designados con la misma letra (prima) del mínimo que los precede. Entonces, los ciclos que coexisten con 3d-H (fig.6.4a)

³⁶ Queda una vez más de manifiesto, que la letra “i” distingue a las órbitas homoclínicas y ciclos que en su pasaje por puntos cercanos al máximo principal del mapa, lo hacen a la izquierda de este, mientras que la letra “d” designa a órbitas que en su pasaje por la recta PG, lo hacen por puntos que se encuentran más allá del punto que determina ese máximo.

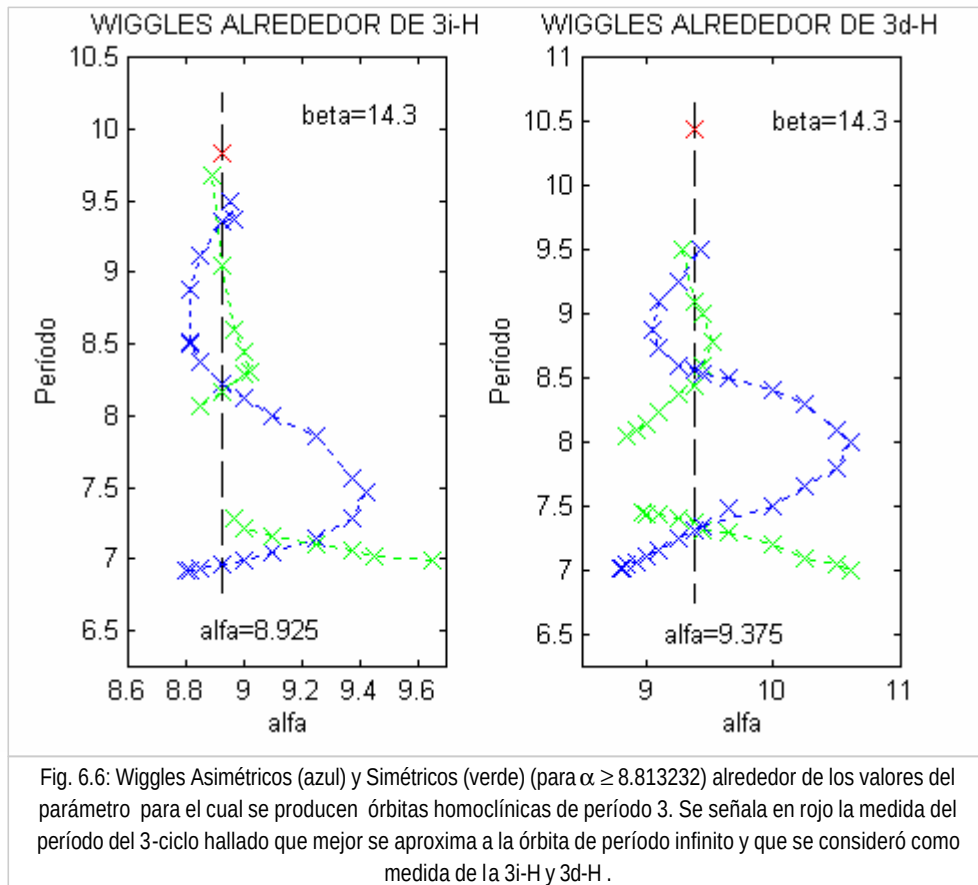
pertenecen a la rama del mapa que une al mínimo a con el máximo a' (azul) o a la rama que une el mínimo A con el máximo A' (verde)³⁷.

Además de los ciclos que se observan en la figura 6.4a, pueden observarse otros ciclos, si aplicamos el mismo análisis de la sección 4.2 al mapa: $r_{n+3} = f^3(r_n)$. En la figura 6.5 se grafica este 3-mapa, (para valores de los parámetros para los cuales se tiene la órbita homoclínica 3d-H) destacándose en las figuras de arriba, la región próxima al punto H. Además de observarse que el punto H es un punto fijo del 3-mapa, se observan otros siete puntos fijos (cortes de la recta $r_{n+3} = r_n$, dibujada en celeste, con el mapa). Todos estos puntos fijos corresponden a diferentes 3-ciclos que, siendo de tipo “i” o “d” coexisten con la órbita homoclínica 3d-H.



Un análisis detallado del mapa unidimensional para el sistema (1.1) y diferentes valores del parámetro a , arrojó como resultados las gráficas que se dibujan en la figura 6.6. Las mismas, presentan los wiggles simétricos y asimétricos para los 3i-ciclos (fig.6.6a) y 3d-ciclos (fig.6.6b), alrededor de los parámetros para los cuales se observaron las órbitas homoclínicas 3-H. El período de los ciclos simétricos (verde) es el doble de lo que se señala en la figura, ya que a diferencia de los ciclos asimétricos, las trayectorias de los ciclos simétricos, antes de regresar al punto de inicio de su órbita, se inyectan en el semiespacio simétrico (definido por $E^S(P_0)$), para reproducir alrededor del otro punto no trivial una trayectoria similar. Los wiggles asimétricos (azul) tienen su comienzo para valores del parámetro para los cuales aún se observa la presencia del Atractor de Rössler, pero dichos valores no se señalan en la figura, ya que concentramos nuestra atención en los 3-ciclos pertenecientes al Atractor de Chua.

³⁷ Recordamos que con el Nacimiento del Doble Scroll, los máximos y mínimos a la derecha del punto H, se van produciendo en forma paulatina, a medida que nos adentramos en la región del plano de parámetros donde el atractor es observable. La figura 6.4a muestra al mapa en su estado casi completo pero, si aumentamos el valor del parámetro desde su valor $a_{NDS} = 8.813232$, encontramos diferentes cambios en la dinámica con el consecuente surgimiento de nuevos extremos relativos. El 3-ciclo de la figura 6.4a, que se dibuja en verde, no puede observarse para valores del parámetro próximos a a_{NDS} .



Si bien cada uno de los períodos graficados en la figura 6.6 se computó directamente sobre las trayectorias que los respectivos ciclos generaban, otra medida de este período es la posición (respecto del punto H) de los puntos fijos del mapa que se encuentran cerca de este punto. El ciclo que pasa por el punto H exacto, es de período infinito. En nuestro cálculo, los puntos rojos marcan el período que se computó para las órbitas homoclínicas 3i-H y 3d-H.

Hacemos notar que las gráficas de la figura 6.6 son discontinuas en las ramas inferiores de los wiggles simétricos: Los 3-ciclos de la rama del mapa que une los mínimos **A** y **B** con el máximo **A'** (ver figura 6.4b), no surgen como consecuencia de una bifurcación nodo-silla, como las observadas en la homoclínica principal, estudiada en el capítulo 4. Los ciclos (izquierdo y derecho) de la rama **A-A'** son observables únicamente para $\alpha > 8.96875$, mientras que los ciclos (izquierdo y derecho) de la rama **A'-B**, pueden observarse para $\alpha > 8.835$. Al construir el esquema de ciclos límites superestables en el plano (a, b) hemos encontrado una explicación a este fenómeno, como se verá en las siguientes secciones.

6.2. SIMULACION DEL MAPA UNIDIMENSIONAL.

Hasta el momento, se ha trabajado dejando fijo el valor del parámetro b y variando el valor del parámetro a . Pero la presencia de las órbitas homoclínicas secundarias y sus ciclos límites asociados se da en todo el plano (a, b) de parámetros. Con el fin de determinar la ubicación aproximada de los valores críticos de los parámetros para los que ocurren los principales fenómenos descriptos en las secciones precedentes, se realizó una interpolación numérica para una malla de valores (a, b) .

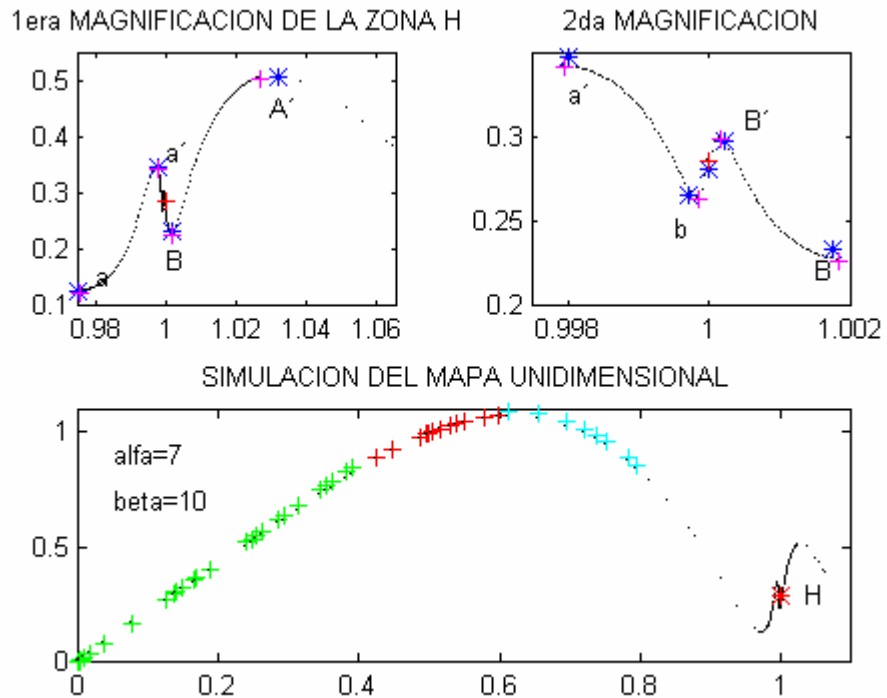


FIG. 6.7 : Simulación del mapa unidimensional en las zonas de interés: región lineal (verde), región próxima al máximo (rojo y celeste), coordenadas del punto H y de los extremos relativos del mapa (azul). En la región próxima al punto H se señalan también los máximos y mínimos medidos (rosado).

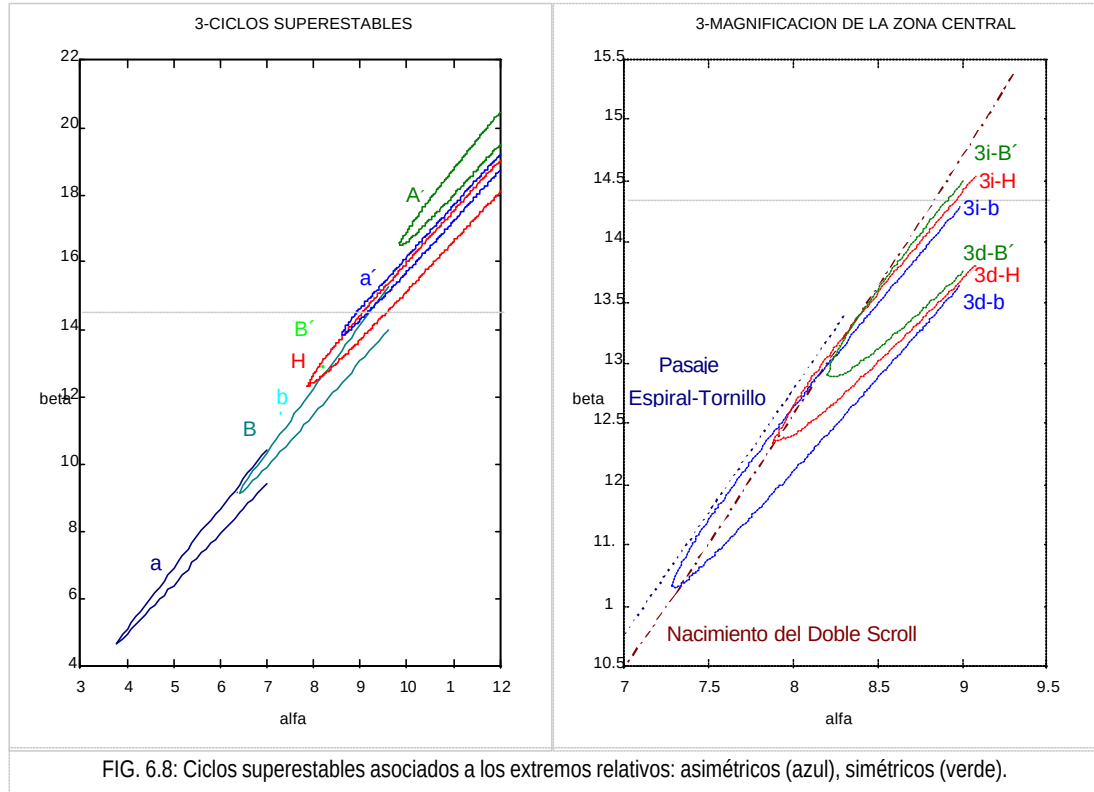
Los mapas que se utilizaron para calcular los coeficientes de las ecuaciones de ajuste, fueron computados para $a = 9.15$ y $b = 14.3$, variando b y a , respectivamente. La gráfica de la figura 6.7, que tomamos como ejemplo del ajuste, muestra que las características principales de un mapa unidimensional (coordenadas de los máximos y mínimos, coeficientes de la región lineal del mapa y coeficientes de las parábolas que simulan la región próxima al máximo principal) se aproximan a las características del mapa original, aún teniendo en cuenta que los parámetros de esta gráfica son muy distintos de aquellos en los cuales se basó el ajuste. Vale recalcar que este mapa no logró reproducir el mapa en la región próxima al mínimo **A**, por lo que no se presentarán resultados de la simulación, con referencia a dicho punto³⁸.

³⁸ Como pudo observarse en el capítulo 4, la región próxima al mínimo **A**, cuando los valores de los parámetros son tales que se ha producido la muerte del Atractor de Chua, adquiere una forma similar (aunque antisimétrica) a la del máximo principal.

6.2.1. ORBITAS HOMOCLINICAS 3-H Y SUS CICLOS LIMITES.

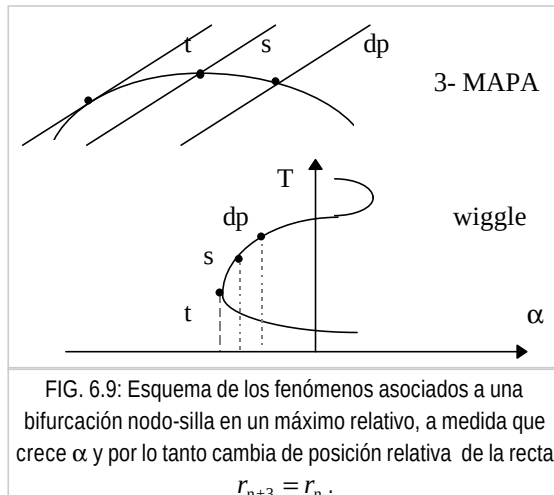
Utilizando el mapa unidimensional simulado y la ecuación 5.2, se determinó el lugar geométrico en el plano (a, b) de los 3-ciclos superestables que tienen su punto fijo en los puntos donde se encuentran los mínimos o máximos secundarios del mapa $r_{n+3} = f^3(r_n)$ ³⁹.

Los resultados de este cálculo se observan en la figura 6.8. Para designar las gráficas, se utilizó el mismo código de la figura 6.4b: La letra **a** señala los valores de los parámetros en donde existen 3-ciclos que tienen uno de los tres puntos fijos, en el primer mínimo del mapa, a la izquierda del punto H, mientras que la letra **a'** designa a los 3-ciclos que tienen uno de sus tres puntos fijos en el siguiente máximo. La rama superior de las parábolas señala los 3i-ciclos, mientras que la rama inferior señala los 3d-ciclos. El punto de intersección de ambas ramas corresponde a la existencia de un 3-ciclo doblemente superestable que pasa por el máximo principal del mapa y el extremo secundario relativo correspondiente.



En la figura 6.8b se detalla el lugar geométrico de los 3-ciclos superestables que se observan más próximos al punto H, la curva 3-H (izquierda y derecha) y las posiciones de la línea NDS (Nacimiento del Doble Scroll) y el pasaje espiral-tornillo del Atractor de Rössler, como referencia.

³⁹ El mismo mapa unidimensional simulado puede ser empleado para analizar la presencia (en el plano de parámetros) de otros n -ciclos.



Fijando $b = 14.3$, en la figura 6.8, observamos que los valores de a donde esa recta intersecta a las líneas correspondientes a los diferentes 3-ciclos, coinciden aproximadamente con los valores para los cuales se observan las bifurcaciones nodo-silla que crean o destruyen los 3-ciclos dibujados en los wiggles de la figura 6.6.

Los 3-ciclos que (en la figura 6.8) se grafican por encima de la recta $b = 14.3$, coinciden con los que no presentan (en la figura 6.6) el “codo” del wiggle asociado a la bifurcación nodo-silla.

En la siguiente tabla se especifican los valores de a (siendo $b = 14.3$) que se midieron (generando los respectivos mapas) y calcularon (en base al mapa interpolado). Vale recordar que ambos valores son teóricamente distintos: el primero

corresponde al valor del parámetro para el cual se produce una bifurcación tangente (t), mientras el segundo corresponde al valor del parámetro para el cual existe un ciclo superestable (s) que pasa por los extremos relativos secundarios del mapa. En la figura 6.9, se esquematiza (en las proximidades de uno de los máximos del 3-mapa) los diferentes fenómenos que van teniendo lugar, a medida que crece el valor de a : bifurcación tangente (t), ciclo superestable que pasa por el extremo relativo (s) y duplicación de período (h). El pequeño rango de valores de a en el cual se producen estos cambios de la dinámica, nos impide distinguir, en una simulación numérica, entre los diferentes fenómenos.

Pero también podemos observar, en la figura 6.8a, que los $3A'$ -ciclos (tanto derecho como izquierdo) no cortan la línea $b = 14.3$. Esto muestra, que tal como dijimos, los 3-ciclos correspondientes a las ramas $A-A'$ y $A'-B$ no desaparecen mediante una bifurcación nodo-silla, en las proximidades del máximo A' cuando las órbitas 3-H sufren bifurcaciones homoclínicas al decrecer el valor de a , desde su valor a_H^{3i} o a_H^{3d} (ver los wiggles simétricos (verdes) de la figura 6.6). Pero esta observación, sólo justifica por qué no existe el “codo” correspondiente al máximo A' . En la próxima sección veremos cómo surgen esos ciclos.

$b = 14.3$	3-ciclo izquierdo		3-ciclo derecho	
extremo	α medido (t)	α calculado (s)	α medido (t)	α calculado (s)
a	9.425	-	10.55	-
a'	8.800	8.819	9.055	9.154
b	8.975	8.962	9.420	9.440
H	8.925	8.922	9.375	9.401
B'	8.894	8.899	9.283	9.298
B	9.020	9.065	9.517	9.611
A'	-	-	-	-

6.3 CAMBIOS EN LA DINAMICA.

En la figura 6.10 (ver páginas 42 y 43) se observa cómo cambia la estructura del 3-mapa, en especial, en la región próxima al máximo principal del mapa unidimensional. Figuras similares pueden obtenerse si se analizan otros n -mapas, los cuales mostrarían el comportamiento de otros n -ciclos.

La primer figura (pag.42) se refiere al comportamiento del 3-mapa para valores de parámetros para los cuales no se ha producido el Nacimiento del Doble Scroll y en ella se observan los cambios producidos por la formación de los diferentes extremos relativos que se representan a la izquierda del punto H en el mapa unidimensional. En la segunda figura (pag.43) se grafican los cambios que se producen en el 3-mapa, cuando se van generando los extremos relativos “simétricos”, o sea aquellos que están asociados al Atractor de Chua.

6.3.1 CAMBIOS EN EL ATRACTOR DE RÖSSLER.

Comenzando por un valor de a pequeño, el comportamiento del 1-mapa es similar al de un mapa de Feigenbaum [22] con un único máximo, ya que nos encontramos en presencia de la Espiral de Rössler. Así lo indica la figura 6.10a (para $a = 8.70$), donde el mínimo relativo central del 3-mapa, corresponde a la tercer imagen del máximo principal del mapa unidimensional. En la figura, se ha dibujado, también, en azul, la recta $r_{n+3} = r_n$. Se determinó que el mínimo antes mencionado es tangente a dicha recta, cuando el valor de los parámetros es apenas mayor que $a = 8.59$ (caso no dibujado), siendo el valor del parámetro $b = 14.3$. Para estos valores de parámetro, se verificó la presencia de un 3-ciclo superestable que pasa por el máximo del mapa unidimensional.

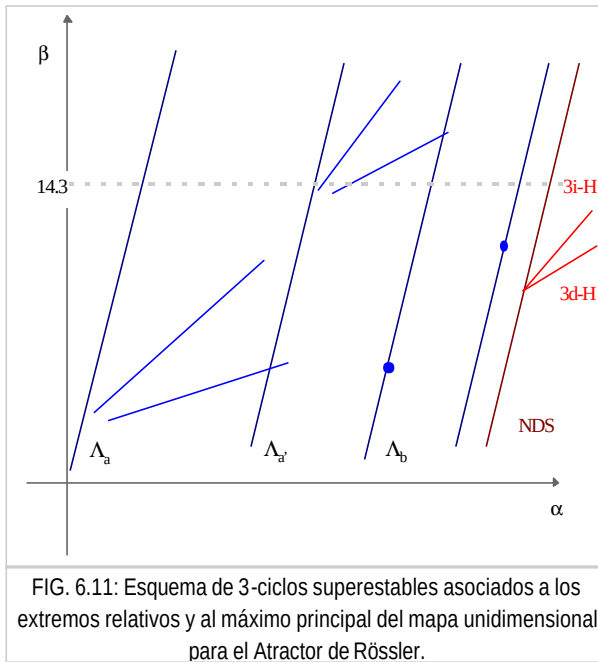
Si seguimos aumentando el valor del parámetro a (mientras b permanece constante), observaremos que se produce un cambio de estructura del 3-mapa: En la figura 6.10b (donde se grafica sólo la región central para $a = 8.80$), se observa que el máximo principal del mapa unidimensional, se transforma, ahora, en un máximo relativo del 3-mapa. Este cambio responde a la formación del mínimo relativo a , responsable del pasaje espiral-tornillo, en el Atractor de Rössler.

En la figura 6.10c, se observa cómo ese máximo es tangente a la recta $r_{n+3} = r_n$, generándose otro 3-ciclo que pasa por el máximo principal del mapa (que de aquí en adelante llamaremos 3mp-ciclo), observable para $a = 8.808$.

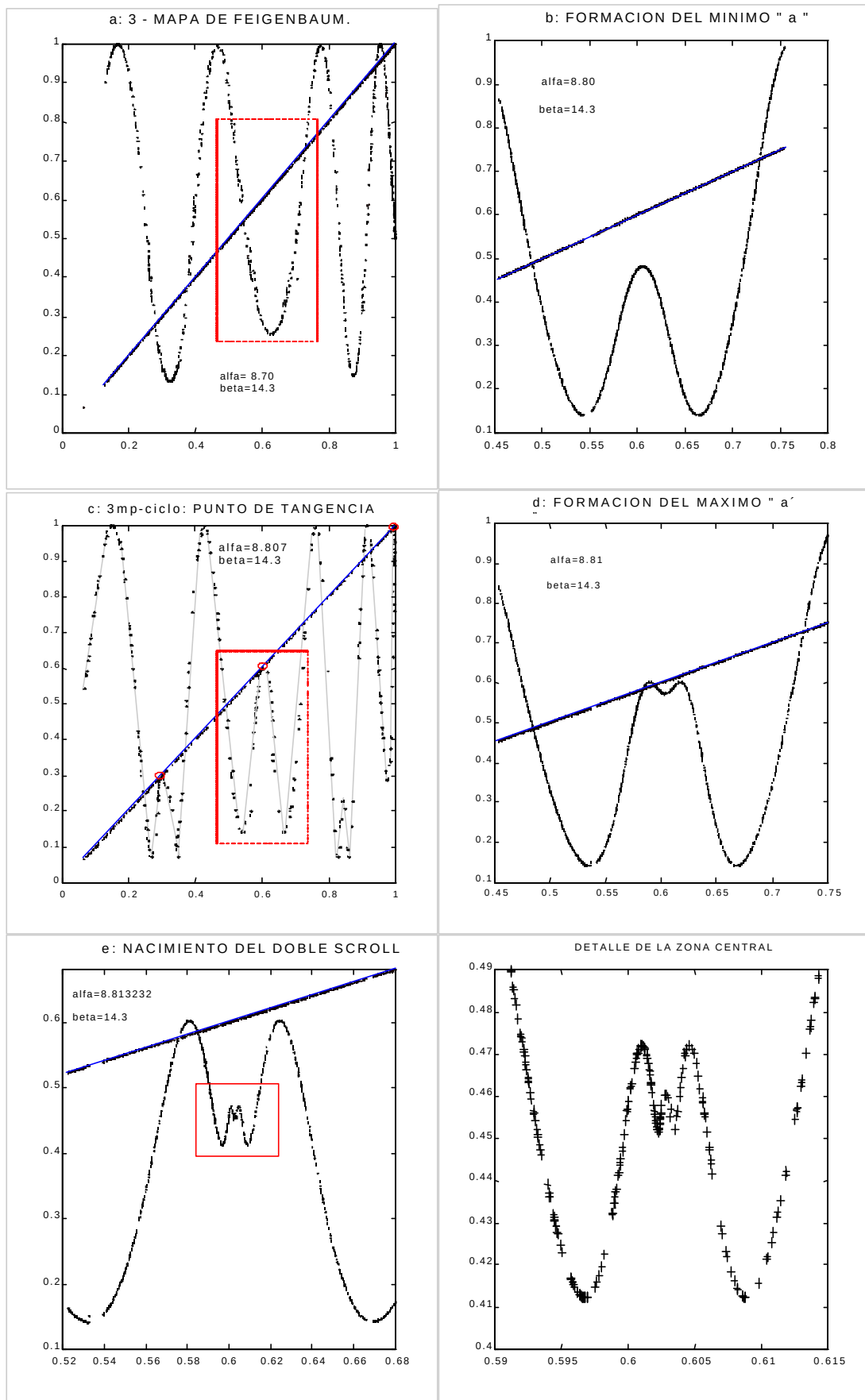
Un posterior aumento del valor del parámetro provoca un nuevo cambio en la estructura (asociado a la aparición del máximo a'), convirtiendo a la tercer imagen del máximo principal del mapa unidimensional, nuevamente, en un mínimo. En la figura 6.10d se detalla la región central del mapa, para este caso. Se observan también, dos puntos fijos, a la izquierda de la tercer imagen del mínimo principal. Dichos puntos fijos señalan la presencia de dos 3i-ciclos: estable (izquierda) y tipo silla (derecha) para $\alpha = 8.8095$ ⁴⁰.

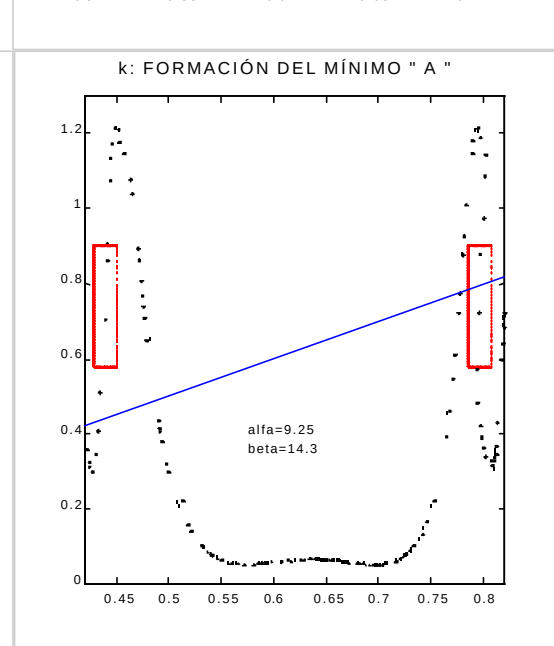
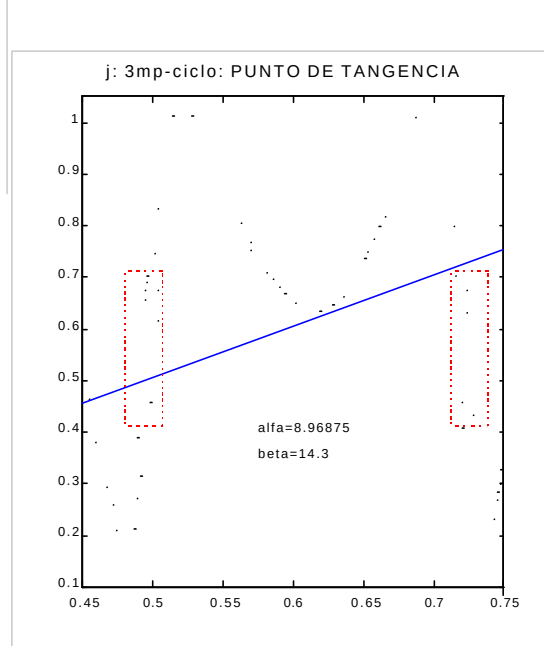
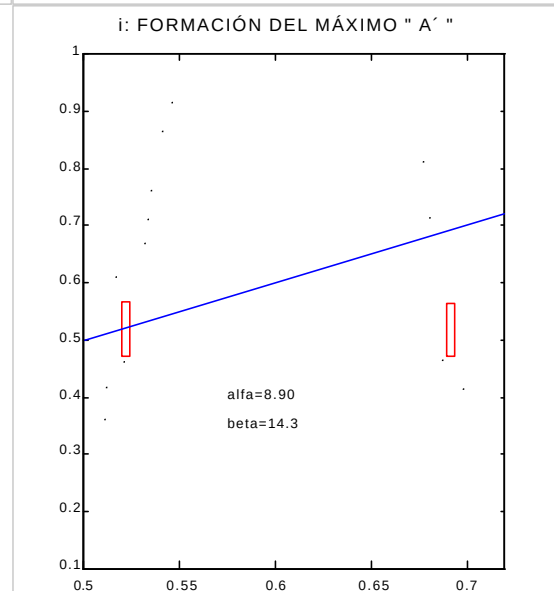
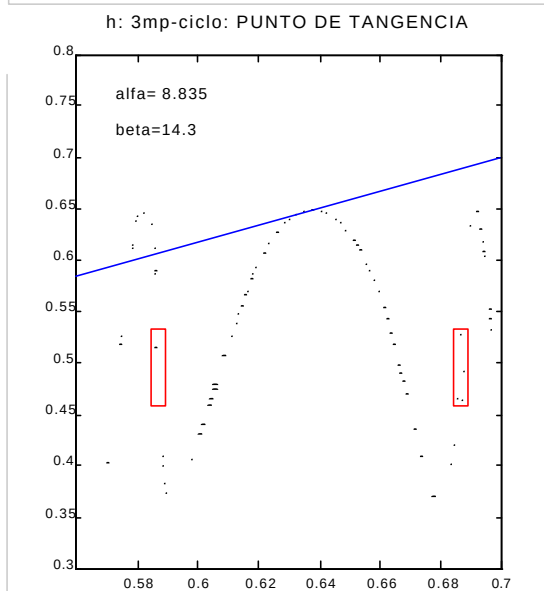
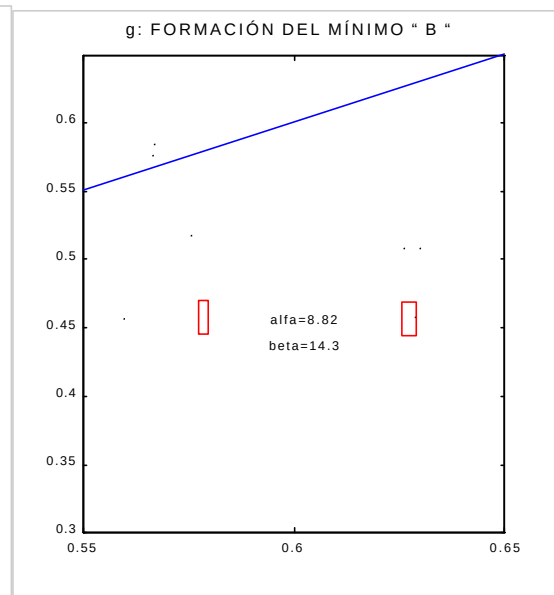
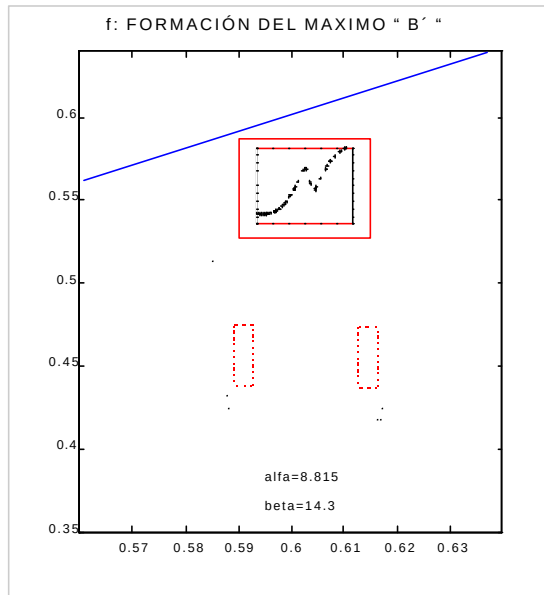
Cuando $a = 8.813232$, el mapa unidimensional es tal que se ha completado la estructura de extremos relativos a la izquierda del punto H y el 3-mapa ha acompañado estos cambios (la tercer imagen del máximo principal se ha convertido sucesivamente en máximo y mínimo), pero no se ha verificado la existencia de otros 3mp-ciclos, ya que estos cambios de estructura, permanecen por debajo de la recta $r_{n+3} = r_n$. La figura 6.10e, que grafica una región aún más reducida que la de la figura anterior, muestra cómo el cambio asociado a la formación del máximo a' ha crecido y cómo se han generado otros tres cambios en la dinámica (asociados a la formación de un mínimo b , un máximo b' y un mínimo c), los cuales son graficados en detalle, en la figura siguiente.

⁴⁰ La estabilidad del 3i-ciclo y el estrecho rango del valor del parámetro, en el cual estamos trabajando, impiden determinar si existe un punto cúspide, asociado a la bifurcación tangente que sufre el 3-ciclo, en su máximo principal y el máximo a' . El punto cúspide se manifestaría si, para un mismo valor del parámetro de control, el máximo del mapa fuera tangente a la recta $r_{n+3} = r_n$ y se convirtiera en el mínimo que se observa en la figura 6.10d.



Teniendo en cuenta el comportamiento que hemos descrito (para b constante), las gráficas de la figura 6.8 y la ecuación 5.3 del capítulo anterior (que describe el lugar geométrico de los 3-ciclos superestables que pasan por el máximo principal del mapa) hemos esquematizado (en función de los parámetros a y b), la posición de los 3-ciclos superestables asociados a los extremos relativos (azul) y asociados al máximo principal (negro), en la figura 6.11. Los 3mp-ciclos, entonces, permiten un pasaje continuo en el plano (a, b) , por los diferentes ciclos doblemente superestables (intersección de la curva 3mp-ciclo con las parábolas 3a-ciclo, 3a'-ciclo, etc.) que se observan sobre las rectas Λ que marcan diferentes cambios en la dinámica.





6.3.2. CAMBIOS EN EL ATRACTOR DE CHUA.

Las gráficas de la página anterior (segunda carilla de la figura 6.10) sólo detallan el comportamiento del 3-mapa en la región próxima al máximo principal. En una primer mirada global, observamos que la tercer imagen de los puntos próximos a este máximo es más regular que en los casos estudiados anteriormente. Sin embargo, la formación de infinitos extremos relativos a la izquierda y derecha del punto H , observable para un rango de valores del parámetro $8.813232 < a < 8.815$ ($b = 14.3$), provocan, también, infinitos cambios en la dinámica, los cuales pueden observarse en dos regiones (que llamaremos $H3$) a los costados de la tercer imagen del máximo principal (señaladas con rojo). Como en el caso anterior, describiremos el comportamiento del 3-mapa cuando aumentamos el valor del parámetro a , dejando el parámetro b constante.

Para $a = 8.815$ (fig.6.10f), se observa que la tercer imagen del máximo del mapa es un mínimo del 3-mapa, lo cual implica que el máximo B' del mapa unidimensional se ha formado, cuando el valor del parámetro era menor. Comenzamos, entonces, el análisis cuando en el mapa unidimensional, ya se han formado infinitos máximos y mínimos relativos, a la derecha del punto H y su imagen en el 3-mapa, se ha desplazado hacia los costados (regiones $H3$), como muestra el detalle graficado.

En la figura 6.10g se observa la reciente formación del mínimo B : la tercer imagen del máximo principal se ha convertido en un máximo. También, se dibujaron las regiones $H3$ que contienen infinitos máximos y mínimos relativos. Y estas regiones se han alejado aún más del máximo principal del 3-mapa

Explicamos este desplazamiento, considerando la relación entre la figura 6.10f y la figura 6.10g. En la primer figura, entre las regiones $H3$ y el mínimo principal, existen dos máximos relativos, que en la figura 6.10g, aparecen desdibujados. A medida que el máximo B' crece, estos mínimos relativos decrecen y son “absorbidos” por las regiones $H3$.

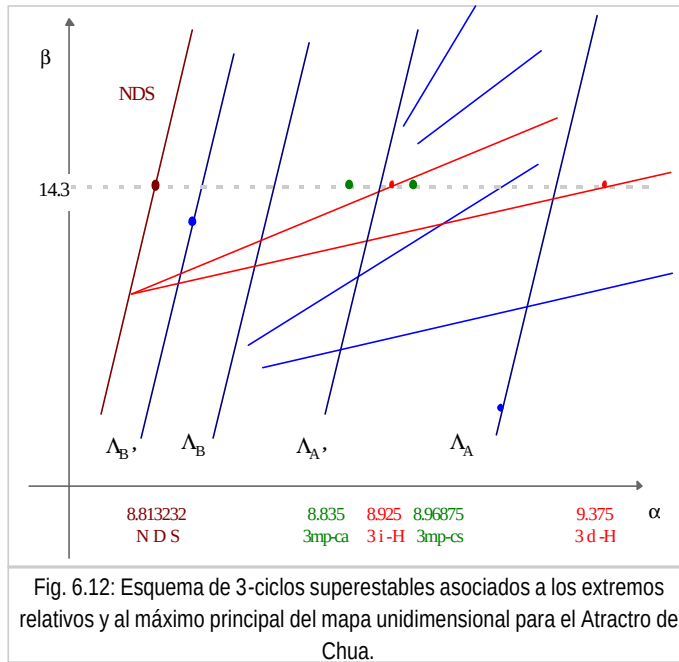
La siguiente gráfica (fig. 6.10h) señala la presencia de un punto de tangencia que dará lugar, a un 3-ciclo superestable que pase por el máximo principal. Uno de los otros tres puntos fijos del ciclo, que se apoya en la rama $A'-B$, que aún no se ha completado (ver siguiente figura). Se observa, además, que los máximos que mencionáramos en el párrafo anterior, han sido completamente “absorvidos” por las regiones $H3$.

Un posterior aumento del valor del parámetro, provocará un crecimiento del máximo central y podrán observarse dos puntos fijos del 3-mapa, a los costados de este máximo. Esos puntos fijos, estarán señalando la presencia de dos 3-ciclos: uno izquierdo y otro derecho, en la rama $A'-B$ del mapa unidimensional y por lo tanto, el nacimiento del wiggle simétrico y continuo (verde) de la figura 6.6 (izquierda y derecha, respectivamente). Entonces, los codos de los wiggles simétricos, se deben a bifurcaciones nodo-silla en los extremos relativos del mapa unidimensional, mientras que el comienzo del wiggle, se debe a una bifurcación nodo-silla en el máximo principal del mapa.

En la figura 6.10i, además de la formación del máximo A' , puede observarse, que la región $H3$ de la izquierda, contiene puntos fijos en el 3-mapa, evidenciando la presencia de los 3-ciclos que generarán los wiggles que se han dibujado en el figura 6.6a.

Un posterior aumento del valor del parámetro (fig.6.10j), genera la presencia de otro punto de tangencia, en la tercera imagen del máximo principal y, por lo tanto se observa un nuevo 3mp-ciclo. Esta bifurcación tangente, (como la que se observa en la figura 6.10h) explica por qué existen 3i-ciclos y 3d-ciclos en la rama $A'-A$, a partir de $\alpha = 8.96875$: el surgimiento de esos ciclos está, también, ligado a una bifurcación nodo-silla en el máximo principal del mapa.

Por último (fig. 6.10k) se observa la formación insipiente del mínimo A . Asimismo, puede observarse cómo la región $H3$ de la derecha contiene puntos fijos, los cuales generan los wiggles de la figura 6.6b.



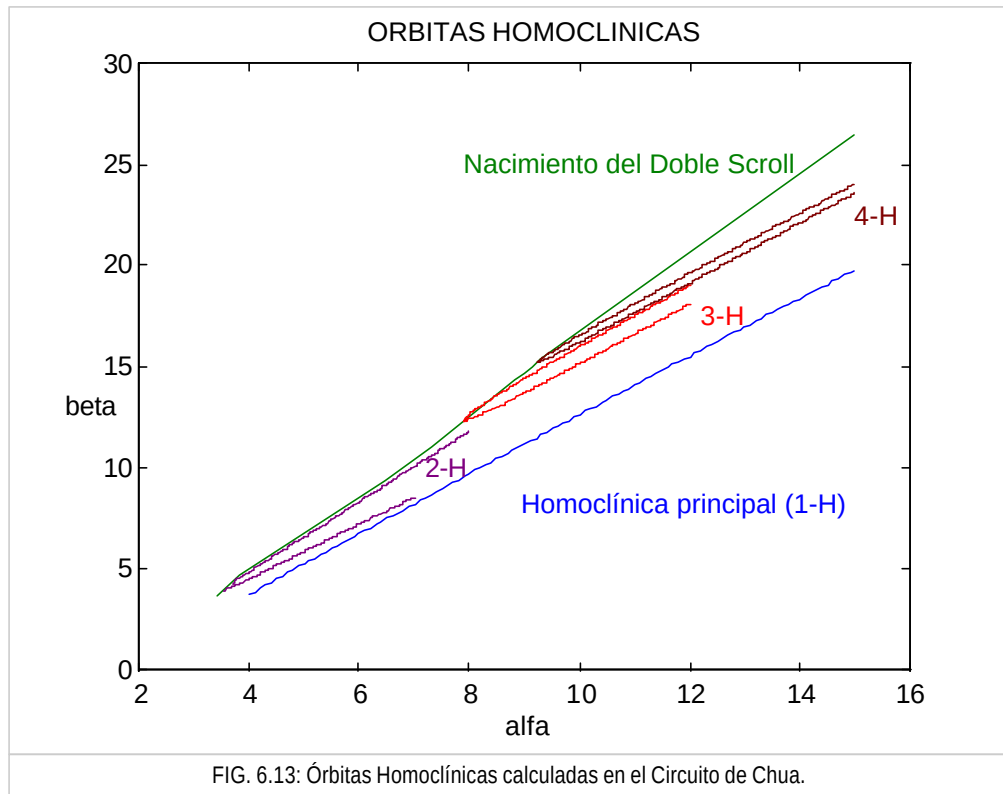
En la figura 6.12, se esquematiza, para el plano (a, b) de parámetros, la presencia de los diferentes 3-ciclos que hemos estudiado; se usa el color azul para señalar las curvas que indican cambios en la dinámica y la presencia de ciclos superestables asociados a los extremos relativos. En negro, se dibuja el lugar geométrico del 3mp-ciclo. En la parte inferior de la figura se señalan los valores de α para los que se han observado el Nacimiento del Doble Scroll, la presencia de una bifurcación tangente en el máximo principal del mapa que da lugar a la aparición del wiggle asimétrico y simétrico (3mp-ca y 3mp-cs, respectivamente) y el valor del parámetro para el cual se observan las órbitas homoclínicas secundarias de período 3, siendo $\beta = 14.3$.

Considerando la figura 6.12, en relación con la figura 6.11, observamos que antes y después del Nacimiento del Doble Scroll, se tiene un comportamiento global muy similar.

6.4 ORBITAS HOMOCLINICAS EN EL ATRACTOR DE CHUA.

Por último, empleando el mapa simulado de la figura 6.7, se calculan (en el plano (a, b) , como se señala en la figura 6.13) los lugares geométricos de las órbitas homoclínicas secundarias 2i-H, 2d-H, 3i-H, 3d-H, 4i-H, 4d-H que se observan coexistiendo con el Atractor de Chua.

Observamos que los lugares geométricos de estas órbitas en el plano de parámetros, corresponden a parábolas que se apoyan en la línea Nacimiento del Doble Scroll y se extienden en la región del plano (a, b) para los cuales se observa el Atractor de Chua. El punto donde se unen las dos ramas de las parábolas (rama inferior, correspondiente a la presencia de la órbita nd -H y rama superior, correspondiente a ni -H), señala los valores de α y β , para los cuales, el máximo principal y el punto H del mapa son puntos fijos del n -mapa.



CAPITULO 7. CONCLUSIONES.

Como se observó en el capítulo 2, el sistema (1.1) presenta una variada galería de fenómenos críticos. Con este trabajo, hemos tratado de conectar esos fenómenos a una estructura más compleja, que actúa como soporte de la dinámica del atractor.

Utilizando un mapa unidimensional, definido en el capítulo 3, hemos logrado reproducir, en el capítulo 4, algunos resultados que Khibnik et al habían determinado, trabajando computacionalmente, con un sistema no lineal, en relación a la homoclínica principal del Circuito de Chua. En el capítulo 5, observamos que dicho mapa es además una excelente herramienta de trabajo en el análisis de otros fenómenos tales como los relacionados con el pasaje espiral-tornillo, en el Atractor de Rössler.

En el capítulo 6, por un lado, determinamos la presencia de diferentes órbitas homoclínicas secundarias, cuyos wiggles están asociados a las sucesivas duplicaciones de período que sufre el sistema (1.1), en su ruta subarmónica.

Pero además, hemos estudiado en detalle los cambios en la dinámica, observables en mapas unidimensionales del tercer retorno (3-mapas), tanto para el Atractor de Rössler, como para el Atractor de Chua, observándose a ambos lados de la curva NDS (Nacimiento del Doble Scroll), una compleja estructura de 3-ciclos, de similares características.

Gaspard y Nicolis [5] señalaban, con relación a los diferentes cambios que sufría la dinámica del Atractor de Rössler, una estructura de líneas que marcan sucesivos traansiciones en la dinámica (curvas Λ), la presencia de n -ciclos superestables que pasan por el máximo principal o los extremos relativos del mapa y la presencia de órbitas homoclínicas (curvas Γ) alrededor de los puntos P_+ ó P_- , las cuales pudimos reproducir para el sistema (1.1).

También, determinamos que el Atractor de Chua, presenta un comportamiento similar, aunque en su seno puedan observarse fenómenos críticos asimétricos y simétricos: En el plano de parámetros (a, b) , entonces, podemos señalar curvas Λ que indiquen los diferentes cambios en la dinámica, que serán el soporte de n -ciclos simétricos y que estarán asociadas a la presencia de órbitas heteroclínicas Δ entre los puntos P_+ y P_- . Una de esas órbitas, es claramente observable (figura 2.2h) y su mapa se graficó en la figura 3.4c₂. En el plano (a, b) , esta órbita heteroclínica, tiene su origen en una curva cercana a la línea NDS y se manifiesta (para $b = 14.3$), una vez que el Atractor de Chua se ha establecido plenamente en la dinámica: ya se han generado todos los extremos relativos que convergen hacia el punto H (definido en el capítulo 3) y que representa el pasaje de la dinámica asimétrica a una dinámica simétrica.

La curva NDS, en el plano de parámetros, entonces, oficia como curva de acumulación de toda esta estructura, tanto por la derecha como por la izquierda, como se ha esquematizado, en la figura 7.1

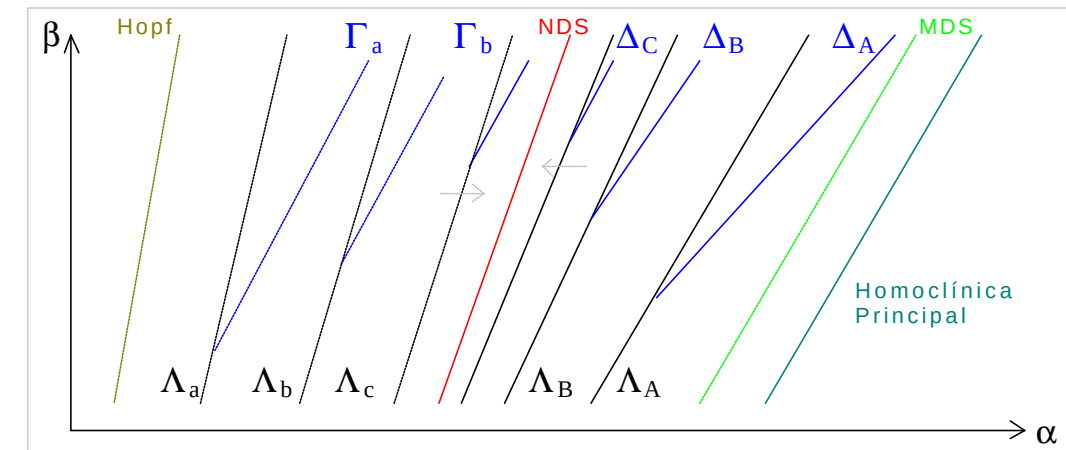


FIG.7.1 : Cambios en la dinámica, homoclinicas y heteroclinicas en el Circuito de Chua.

Por otro lado, el hecho de poder observar curvas en el plano de parámetros que indiquen la presencia de órbitas homoclinicas 2-H, 4'-H, 3-H, 4-H (como las observadas en las figura 6.1, 6.3 y 6.13), induce a pensar, que existen otras curvas que señalen la presencia de otros n -ciclos, que “apoyados en la línea NDS”, indiquen el lugar geométrico de órbitas homoclinicas secundarias de mayor orden, en el plano de parámetros.

Pero, ¿hacia dónde convergen esos n -ciclos?. Siguiendo un razonamiento similar al de capítulo 5 y teniendo en cuenta la estructura similar del Atractor de Rössler y el Atractor de Chua, respecto de la curva NDS, en el plano de parámetros, suponemos que las curvas n -H se acumulan, sobre la curva NDS hacia una curva que indique la presencia de una órbita heteroclinica simétrica, entre los puntos $P_{\pm}$ y P_0 ⁴¹.

En ese caso, entonces, el mapa unidimensional debiera ser tal que la ordenada del punto H, sería nula ya que el flujo que proviene de la región D_1 , se inyecta en D_0 exactamente sobre la variedad estable de P_0 (el plano $E^s(P_0)$) (por lo tanto pasó por H) y se mapea exactamente en el punto P, de coordenadas (0,0) en el mapa unidimensional (ver figura 2.4). En la figura 7.2 se esquematiza cómo sería el flujo y mapa correspondientes a la órbita heteroclinica descrita.

En conclusión hemos encontrado una estructura bien establecida en el espacio de las fases, que explica la existencia del Atractor de Chua. Asimismo existe evidencia numérica de la presencia de una órbita heteroclinica que involucra a los tres puntos fijos del sistema (1,1) y que estaría asociada al nacimiento de dicho atractor.

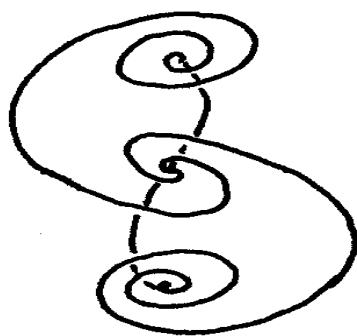


FIG. 7.2a: Trayectoria heteroclinica entre los puntos P_{+} y P_0 .

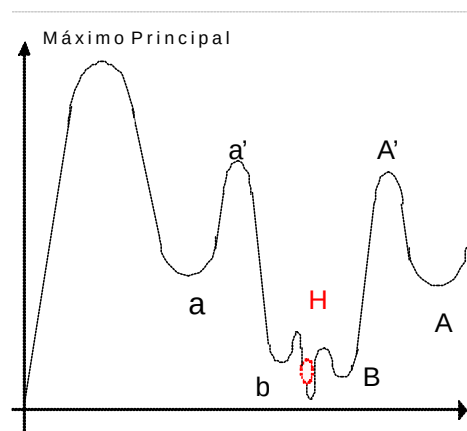


FIG. 7.2b: Mapa para una trayectoria heteroclinica entre P_{+} y P_0 .

⁴¹ En la bibliografía, estudiada no se ha reportado la presencia de esta órbita.

APENDICE I.
SISTEMAS DINAMICOS [25,26,27].

En este apéndice se explican, en forma muy escueta alguna de las propiedades dinámicas más sencillas, que presentan los sistemas dinámicos no lineales y en especial, el sistema de ecuaciones (I.1). Nuestra meta no es hacer un análisis formal de los fenómenos no lineales, sino, introducir algunos conceptos, que por ser primarios, se nombran permanentemente durante este trabajo.

I.1 DEFINICIONES.

El sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} \equiv \dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \quad / \quad \vec{x} \in \mathfrak{R}^n \quad (\text{I.1})$$

donde $\vec{f}: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ es una función suave ($\vec{f} \in C^\infty$) no lineal, tiene solución única cuando se fija una condición inicial $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$. Llamaremos flujo $j_t(\vec{x}_0)$ a dicha solución.

Definimos los puntos de equilibrio (o puntos fijos) como aquellos puntos que verifican:

$$\vec{f}(\vec{x}^*) = 0 \quad (\text{I.2})$$

Entonces, podemos caracterizar el comportamiento de las soluciones del sistema, cerca de los puntos fijos, linealizando la ecuación (I.1) en $\vec{x}^*$ y estudiando la ecuación de pequeñas perturbaciones:

$$\dot{\vec{x}} = D\vec{f}(\vec{x}^*)\vec{x} \quad / \quad \vec{x} \in \mathfrak{R}^n \quad (\text{I.3})$$

donde $D\vec{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}$ es la matriz jacobiana de la función $\vec{f}(\vec{x})$ y $\vec{x} = \vec{x}^* + \vec{x}^- \quad / \quad |\vec{x}^-| \ll 1$.

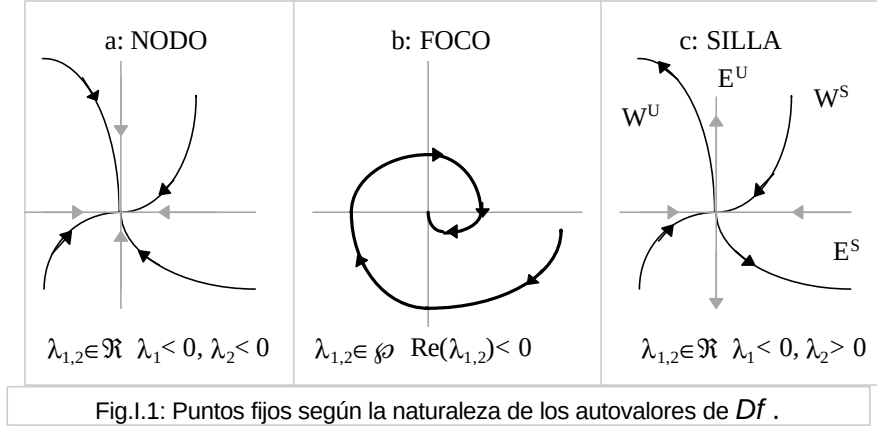
Consideremos ahora, uno de los puntos fijos del sistema (I.1). Si la matriz jacobiana no tiene autovalores reales nulos o autovalores complejos con parte real nula, el punto fijo es hiperbólico o no degenerado y el comportamiento asintótico de la solución, cerca de este punto fijo, está determinada por la ecuación (I.3). Los autovectores correspondientes a autovalores con parte real negativa, constituyen el espacio tangente estable (E^S) e indican las direcciones por las que el flujo (a tiempos positivos) se acerca asintóticamente al punto fijo; los autovectores correspondientes a autovalores (reales o complejos) con parte real positiva, constituyen el espacio tangente inestable (E^U) ya que señalan las direcciones por las que el flujo (a tiempos negativos) se acerca asintóticamente al punto fijo⁴².

Definimos, entonces las variedades estable e inestable locales del punto fijo, como el conjunto de puntos que pertenecen a un intervalo U (en $\mathfrak{R}^n$) y tal que el flujo que parte de esos puntos (hacia adelante o hacia atrás en el tiempo, respectivamente), se acerca asintóticamente al punto fijo.

$$\begin{aligned} W_{loc}^S(\vec{x}^*) &= \left\{ \vec{x} \in U \mid j_t(\vec{x}) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \vec{x}^* \right\} \\ W_{loc}^U(\vec{x}^*) &= \left\{ \vec{x} \in U \mid j_t(\vec{x}) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} \vec{x}^* \right\} \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

El teorema de la variedad estable de un punto fijo, indica que las variedades estables e inestables de los puntos fijos de un sistema como el (I.1) son funciones suaves en el espacio, tienen la misma dimensión que los espacios tangentes correspondientes y son tangentes a éstos.

⁴² El concepto de “acercamiento a tiempos negativos” puede aplicarse, ya que el sistema (I.1) es reversible en el tiempo. Hablar de un “alejamiento a tiempos positivos”, sería restringir la definición de variedad inestable, a aquellos puntos que están cerca del punto fijo: el flujo que parte de estos puntos, puede alejarse del punto fijo, sólo si alguna vez estuvo cerca.



En la figura I.1 se señala un esquema de las soluciones que tiene un sistema de dos ecuaciones, en las inmediaciones de uno de sus puntos fijos y el nombre con el cual se caracteriza dicho punto. En las primeras dos figuras se muestra solamente los puntos que son de tipo sumidero (observar que todas las raíces (reales o complejas) tienen parte real negativa. Igual clasificación, se hace en el caso en que las raíces sean (reales o complejas) con parte real positiva, excepto por el hecho de que el flujo, en estos casos, se aleja del punto fijo. En la última figura se señala un punto de tipo silla: los autovalores de la matriz jacobiana son reales de diferente signo. Si el sistema es de 3 ecuaciones diferenciales, los esquemas de la figura I.1 pueden combinarse con una tercer raíz real λ_3 . Cuando esta raíz es positiva, los puntos fijos pueden clasificarse en nodo-silla, foco-silla, en los dos primeros casos, mientras que el tercer caso sigue siendo un punto fijo de tipo silla. Si la raíz λ_3 es negativa, el primer caso sigue siendo un punto fijo de tipo nodo, el segundo caso se convierte en un punto foco-nodo y el tercer caso, sigue siendo un punto silla.

Las variedades locales de un punto fijo, tienen análogos globales: si consideramos los flujos que se inician en los puntos de las variedades locales del punto fijo, la variedad global estable de este punto, está constituida por la unión de todos los flujos que llegaron a ese punto. Del mismo modo, considerando los puntos de la variedad inestable local del punto fijo, se define la variedad inestable global, como la unión de los flujos que partieron de los puntos de la variedad inestable.

Es importante señalar que las variedades globales estables de dos puntos fijos distintos, no pueden intersectarse, dado que el flujo que parte de un punto es único, por lo que no puede llegar a dos puntos distintos. Lo mismo ocurre con dos variedades inestables. Sin embargo, una variedad estable y otra inestable (de un mismo punto o de puntos distintos) pueden intersectarse. Es más, cuando esto sucede, se observa uno de los fenómenos dinámicos más complejos, como se verá a lo largo de este trabajo y en especial, en el apéndice IV.

Los sistemas dinámicos no lineales, además de puntos fijos, tienen órbitas periódicas, llamadas ciclos límites, por lo que es importante, definir variedades estable e inestable de las órbitas cerradas γ , como aquellos puntos de donde parte el flujo que asintóticamente se “pegará” a la órbita (a tiempos positivos o negativos):

$$\begin{aligned} W_{loc}^S(\bar{x}^*) &= \left\{ \bar{x} \in U \mid \left| j_t(\bar{x}) - g \right| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \right\} \\ W_{loc}^U(\bar{x}^*) &= \left\{ \bar{x} \in U \mid \left| j_t(\bar{x}) - g \right| \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0 \right\} \end{aligned} \quad (I.5)$$

I.2 MAPAS.

Consideremos el flujo $j_t(\bar{x}_0)$, solución del sistema (I.1) con condiciones iniciales. Si, a lo largo del flujo consideramos puntos aislados, podemos construir un mapa $\vec{g}$ que, aplicado a un punto de coordenadas $\bar{x}_p$ del flujo, lleve al siguiente punto de coordenadas $\bar{x}_{p+1}$ (ver figura I.2):

$$\bar{x}_{p+1} = \vec{g}(\bar{x}_p) \quad (I.6)$$

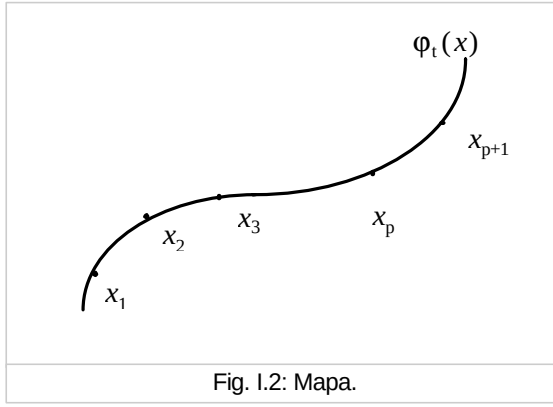


Fig. I.2: Mapa.

Todas las propiedades que observamos para el flujo (I.1) se verifican para el mapa (I.6); los puntos fijos son no-degenerados o hiperbólicos, cuando los módulos de los autovalores (en general, complejos) de la matriz jacobiana evaluada en el punto fijo, son diferentes de 1 ya que en este caso, debe tenerse en cuenta que la condición de punto fijo está dada por⁴³:

$$\bar{x}_{p+1} = \bar{g}(\bar{x}_p) = \bar{x}_p \quad (I.7)$$

Así, cuando los módulos de los autovalores son menores que la unidad, los autovectores correspondientes definen el espacio tangente estable. Y cuando el módulo de los autovalores es mayor que

la unidad, los autovectores correspondientes, definen el espacio tangente inestable.

Hacemos notar, que el mapa que acabamos de definir, conserva todas las propiedades del sistema de ecuaciones diferenciales, pero adquiere otras propiedades, no observables en el flujo que le dio lugar, como se observará en la sección I.5.

I.2.1 MAPA DE POINCARÉ.

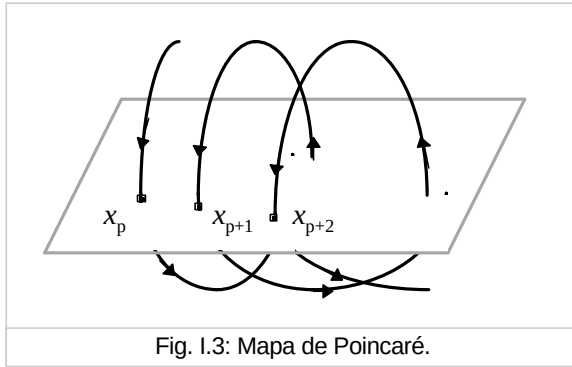


Fig. I.3: Mapa de Poincaré.

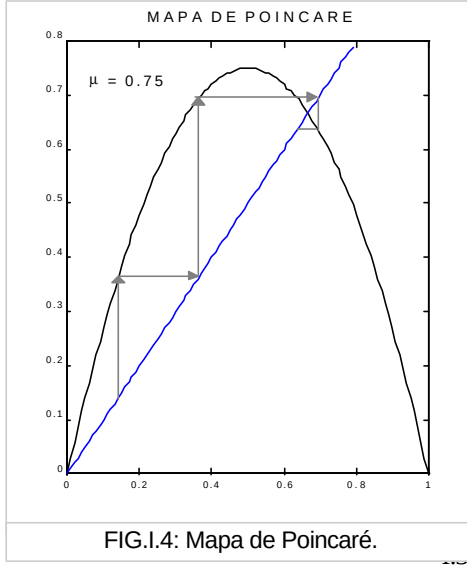
Dado un sistema de ecuaciones diferenciales de n variables, es posible definir un mapa, considerando el pasaje del flujo a través de una superficie (de dimensión $n-1$), como se esquematiza en la figura I.3. El mapa de Poincaré (llamado también de primer retorno) relaciona al punto de coordenadas $\bar{x}_p$ (sobre la superficie), con el siguiente punto de intersección (en el mismo sentido) del flujo con la superficie: $\bar{x}_{p+1}$.

Cuando el flujo que parte del punto $\bar{x}_p$, describe una órbita periódica, al cabo de un tiempo

T (período), retornará a la superficie, incidiendo en el mismo punto: $\bar{x}_{p+1} = \bar{x}_p$. En un mapa de Poincaré, dicha órbita se representará, a través de un punto fijo, al que se le podrán aplicar las propiedades que describíamos en la sección anterior.

⁴³Quien se anula ahora, es la función: $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{g}(\bar{x}) - \bar{x}$ y los autovalores de:

$$D\bar{f} = D\bar{g} - \bar{I} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \end{bmatrix} - \bar{I} \text{ explican la estabilidad de dichos puntos.}$$



Un mapa (en particular el mapa de Poincaré) puede representarse como en la figura I.4, donde se ha graficado el mapa logístico⁴⁴. Las abscisas del mapa representan a las coordenadas del punto $\bar{x}_p$, mientras que las ordenadas, representan a las coordenadas del punto $\bar{x}_{p+1}$. Considerando la recta $\bar{x}_{p+1} = \bar{x}_p$ (azul) se puede obtener fácilmente, en forma gráfica, los sucesivos puntos del mapa. En la figura se señalan dos puntos fijos: uno inestable (el origen) y otro de coordenadas:

$$x_{p+1} = x_p = \frac{2}{3}$$

VARIEDAD CENTRAL.

Extendiendo la definición de espacio tangente y variedad a los autovalores con parte real nula (o módulo 1, para mapas), señalamos que existe una variedad central W^C (y un espacio tangente correspondiente). Sin embargo, el teorema de la variedad central indica que ésta puede no ser única, como veremos en los ejemplos de la próxima sección.

De todas formas, aplicando un cambio de variable adecuado, el sistema I.1 (o el mapa I.6), puede expresarse en tres ecuaciones que involucren a los espacios tangentes estable (s), inestable (u) y central (c):

$$\begin{aligned}\dot{\bar{s}} &= A_1 \bar{s} + \bar{f}_1(\bar{s}, \bar{u}, \bar{c}) \\ \dot{\bar{u}} &= A_2 \bar{u} + \bar{f}_2(\bar{s}, \bar{u}, \bar{c}) \\ \dot{\bar{c}} &= A_3 \bar{c} + \bar{f}_3(\bar{s}, \bar{u}, \bar{c})\end{aligned}\quad (I.8)$$

donde las matrices A_i contienen los autovalores con parte real negativa, positiva y nula, respectivamente, y las funciones $\bar{f}_i$ son funciones no lineales que involucren a los tres espacios tangentes.

I.4 BIFURCACIONES LOCALES EN FLUJOS.

Una bifurcación se define, en sentido amplio, como todo cambio cualitativo que sufre la dinámica de un sistema o mapa, cuando se varía el valor de un parámetro de control.

Para desarrollar esta idea, consideramos un sistema de ecuaciones diferenciales, que depende de un parámetro μ :

$$\frac{d\bar{x}}{dt} \equiv \dot{\bar{x}} = \vec{f}(\bar{x}, m) \quad / \quad \bar{x} \in \mathfrak{R}^n \quad (I.9)$$

donde $\vec{f}: \mathfrak{R}^{n+1} \rightarrow \mathfrak{R}^n$. Las coordenadas de los puntos fijos, los autovalores de la matriz jacobiana evaluada en ellos, sus autovectores y sus variedades dependen ahora, del parámetro μ .

Entonces, la parte real de uno de los autovalores de la matriz jacobiana evaluada en alguno de los puntos fijos, podría anularse, para un valor del parámetro μ_c (llamado valor crítico). El cambio dinámico que produce este fenómeno, se llama bifurcación de codimensión 1. En esta sección nos proponemos describir estas bifurcaciones locales, para los puntos fijos de un flujo, dejando para la siguiente sección las bifurcaciones locales que se pueden determinar en un mapa.

Para desarrollar el análisis de cada uno de los casos posibles, consideraremos que el sistema (I.9) tiene una única variable y por lo tanto un único autovalor de la matriz jacobiana, evaluada en los puntos fijos⁴⁵. Además, mediante un cambio de variable, siempre es posible que el valor crítico del parámetro sea

⁴⁴ $x_{p+1} = 4\mu x_p (1 - x_p)$ donde μ es un parámetro de control.

⁴⁵ $l(m) = \frac{\nabla f}{\nabla x}(x^*, m)$

$\mu_c=0$, tal que exista un punto fijo $x^*(m_c=0)=0$. Tales hipótesis, determinan una forma normal para los diferentes tipos de bifurcación que analizaremos a continuación⁴⁶.

I.4.1 BIFURCACION NODO-SILLA.

La ecuación: $\dot{x} = m - x^2$ es la forma normal de una bifurcación llamada nodo-silla. Observamos que, para dicha ecuación, no existen puntos fijos cuando $\mu < 0$, mientras que existen dos puntos fijos $x_{1,2}^*$, cuando $\mu > 0$. Evaluando la ecuación de pequeñas perturbaciones ($x = x^* + \chi \Rightarrow \dot{\chi} = Df(x^*)\chi$), obtenemos la estabilidad de los puntos fijos:

$$\begin{aligned} x_1^* = \sqrt{m} &\Rightarrow \dot{\chi} = -2x^*\chi \Rightarrow x_1^* \text{ estable} \\ x_2^* = -\sqrt{m} &\Rightarrow \dot{\chi} = -2x^*\chi \Rightarrow x_2^* \text{ inestable} \end{aligned} \quad (I.10)$$

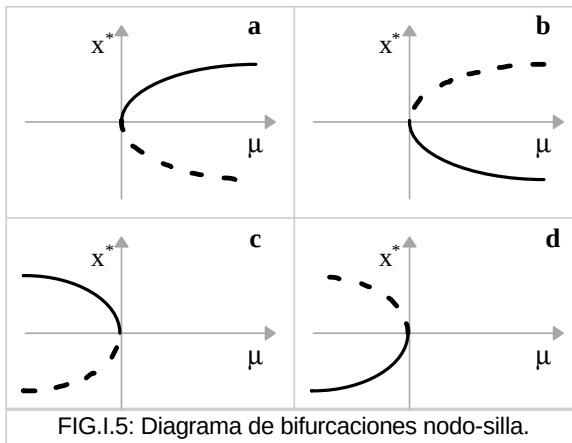


FIG.I.5: Diagrama de bifurcaciones nodo-silla.

En la figura I.5a se esquematiza la posición de estos puntos fijos, al variar el parámetro, utilizando una curva continua para el punto fijo estable y una curva punteada para el punto inestable.

La bifurcación nodo-silla, puede adquirir otras formas normales, variando el signo de los términos. En la figura I.5b,c,d se señalan todos los posibles esquemas de puntos fijos que ellas generan.

La bifurcación de la figura I.5a y de la figura I.5b se llaman supercríticas, ya que los puntos fijos tienen lugar para valores $\mu > \mu_c$. Las figuras I.5c,d, muestran bifurcaciones nodo-silla subcríticas.

I.4.2 BIFURCACION DE INTERCAMBIO.

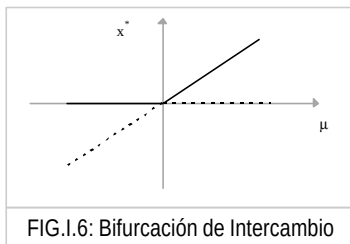


FIG.I.6: Bifurcación de Intercambio

La ecuación $\dot{x} = x(m - x)$ tiene dos puntos fijos, cuya estabilidad puede determinarse, como en el caso anterior.

En la figura I.6 se grafica este caso, aunque vale señalar que la forma normal puede tener términos de diferentes signos a los estudiados, por lo que existen, como en el caso anterior, cuatro diferentes esquemas posibles. El caso graficado corresponde a:

$$\begin{aligned} x_1^* = 0 &\Rightarrow \dot{\chi} = m\chi \Rightarrow m < 0: x_1^* \text{ estable} \quad x_2^* \text{ inestable} \\ x_2^* = m &\Rightarrow \dot{\chi} = -2m\chi \Rightarrow m > 0: x_1^* \text{ inestable} \quad x_2^* \text{ estable} \end{aligned} \quad (I.11)$$

I.4.3 BIFURCACION DE HORQUILLA.

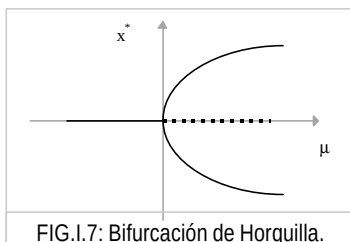


FIG.I.7: Bifurcación de Horquilla.

La ecuación $\dot{x} = x(m - x^2)$, analizada con la misma técnica que en los casos anteriores, indica la presencia de un punto fijo para $\mu < 0$ y tres puntos fijos para $\mu > 0$.

En la figura I.7 se grafica esta situación que, como en la sección I.4.1, al cambiar el signo de los términos, puede dar lugar a una

⁴⁶ Considerando un sistema más complejo (como el de la ec.I.8), se puede aplicar un nuevo cambio de variable, de modo tal de desacoplar los modos estable e inestable de los modos centrales [25,1]

bifurcación subcrítica o supercrítica o a intercambios de estabilidad de los puntos fijos. El caso graficado verifica:

$$\begin{aligned} x_1^* = 0 \\ x_{2,3}^* = \pm\sqrt{m} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x} &= mx \\ \dot{x} &= -3mx \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} m < 0: & \quad x_1^* \text{ estable} \\ m > 0: & \quad x_1^* \text{ inestable} \quad x_{2,3}^* \text{ estables} \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

I.4.4 BIFURCACION DE HOPF.

Consideremos ahora el caso en que el sistema tiene dos variables. Supongamos, además, que evaluando la matriz jacobiana en alguno de los puntos fijos, se tienen dos raíces complejas ($\sigma \pm i\omega$). Observaremos qué sucede cuando, al variar el parámetro de control, la parte real de las raíces se anula. Como el flujo está definido en un plano (y se determinaron un par de autovectores (u, v), correspondientes a los autovalores $\sigma \pm i\omega$, se puede hacer un cambio de variable, de modo tal de expresar las ecuaciones en coordenadas polares, considerando la distancia r de un punto del flujo al punto fijo y el ángulo que forma dicho radio vector con alguno de los ejes coordenados u o v . Esto da como resultado una forma normal que, en su expresión más sencilla, será⁴⁷:

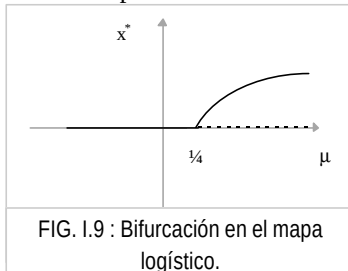
$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(m - r^2) \\ \dot{q} &= w(m) \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

Al anularse la primer ecuación, determinaremos el radio de las órbitas periódicas que se dan sobre el plano y cuyo período está dado por: , quien también varía con el valor del parámetro.

El análisis de la bifurcación que surge para $\mu_c = 0$, tiene las mismas características que la bifurcación de horquilla, que explicamos en la sección anterior, con una salvedad: como r representa una distancia, la rama negativa de la bifurcación de la figura I.8, no tiene sentido. Entonces, para $\mu < 0$ existe un punto fijo estable (dado por $r = 0$), mientras que para $\mu > 0$, además del punto fijo (que cambió su estabilidad), existe una órbita periódica estable (de radio $\sqrt{\mu}$), que va creciendo, a medida que el valor del parámetro crece.

I.5 BIFURCACIONES EN MAPAS.

Un mapa unidimensional también puede depender de un parámetro (como en el caso del mapa logístico de la figura I.4). Si el autovalor de la matriz jacobiana (evaluada en un punto fijo del mapa) es la unidad, para un valor crítico del parámetro, el mapa sufre bifurcaciones como las estudiadas en las secciones precedentes.



El mapa logístico, en particular, sufre una bifurcación en $\mu_c = 1/4$, ya que inicialmente tenía sólo un punto fijo en el origen y ahora tiene, además otro punto fijo:

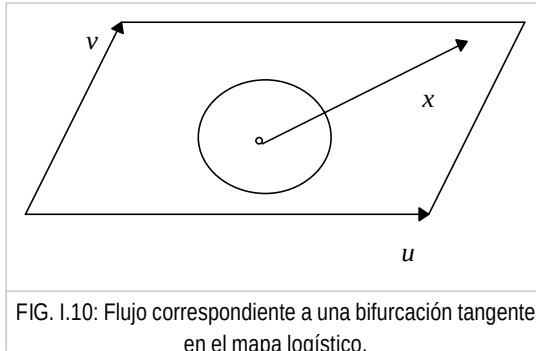
$$x_{n+1} = g(x_n) = 4m x_n(1 - x_n) = x_n \Rightarrow \begin{aligned} x_n^* &= 0 \\ x_n^* &= 1 - \frac{1}{4m} \end{aligned} \quad (\text{I.14})$$

y la ecuación de pequeñas perturbaciones, aplicada a $f(x) = 4m x(1 - x) - x$, da como resultado el esquema de la figura I.9.

⁴⁷ La forma normal de una bifurcación de Hopf está dada por la expresión:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r \left[s(m) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(m) r^{2i} \right] \\ \dot{q} &= w(m) + \sum_{i=1}^{\infty} b_i(m) r^{2i} \end{aligned}$$

En forma general, diremos que las bifurcaciones de tipo nodo-silla, de tipo intercambio y de tipo horquilla, en un mapa, verifican: $\frac{\partial g}{\partial x}(x^*, m_c) = 1$ y se llaman bifurcaciones tangentes, dado que se producen cuando el valor del parámetro es tal que el mapa es tangente a la recta $x_{n+1} = x_n$.



Supongamos que el mapa logístico es el mapa del primer retorno de un flujo en $\mathbb{R}^2$, donde la superficie de Poincaré está dada por una recta $\vec{x}$. Considerando, nuevamente, la bifurcación tangente que sufre para $\mu_c = 1/4$, podemos afirmar que dicho flujo tiene, cuando $\mu < 1/4$, un único punto fijo estable en el origen, mientras que, cuando $\mu > 1/4$, además de tener un punto fijo inestable, tiene una órbita periódica de radio: $1 - 1/4\mu$ (figura I.10). Si hubiéramos estudiado el comportamiento del flujo en $\mathbb{R}^2$, habríamos observado una bifurcación de Hopf: el punto fijo no trivial del

mapa, representa una órbita periódica del flujo.

I.5.1 DUPLICACIONES DE PERIODO.

Consideramos, nuevamente en forma general, un mapa unidimensional: $x_{n+1} = g(x_n, m)$ que tenga un valor crítico en $\mu_c = 0$ y tal que el origen sea un punto fijo ($x^*(m_c = 0) = 0$).

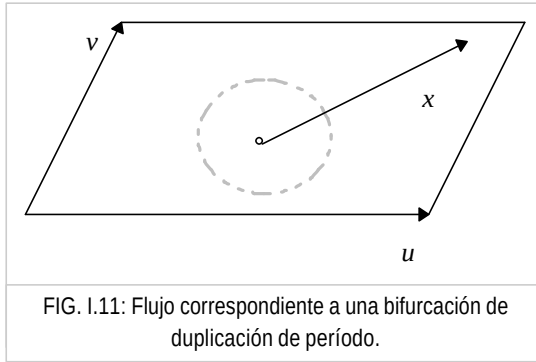
Si se verifica que la pendiente del mapa en el punto fijo es:

$$\frac{dg}{dx}(0,0) = -1 \quad (I.15)$$

no existe una bifurcación tangente para este mapa, en ese punto. Sin embargo, el mapa del segundo retorno: $x_{n+2} = g^2(x_n, m) = g(g(x_n, m), m)$, sí presenta dicha bifurcación, puesto que la función: $f(x, \mu) = g^2(x, \mu) - x$, adquiere la forma normal de una bifurcación tangente⁴⁸ en el origen, como las mencionadas en la sección anterior.

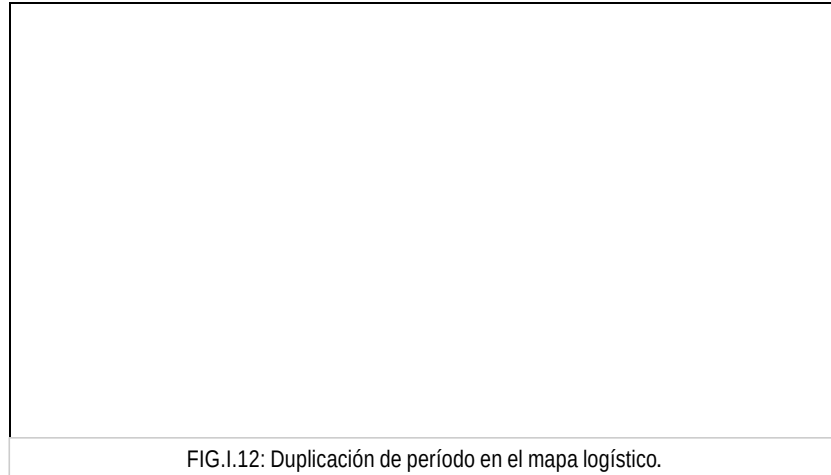
Para fijar ideas, supongamos que esa forma normal es la de tipo horquilla (fig.I.8). Entonces, en el 2-mapa, cuando $\mu < 0$, el origen es un punto fijo estable, mientras que cuando $\mu > 0$, el origen es un punto fijo inestable y la bifurcación provocó la aparición de dos puntos fijos ($x_{n+2}^- = x_n^-$ y $x_{n+2}^+ = x_n^+$), los cuales verificarán, en el mapa de primer retorno, que la ordenada de uno de los puntos fijos del 2-mapa es la abscisa del otro punto fijo :

$$x_{n+1}^- = g(x_n^-) = x_n^+ \text{ y } x_{n+1}^+ = g(x_n^+) = x_n^- \quad (I.16)$$



Cuando el mapa unidimensional es una medida del mapa de Poincaré de un flujo en $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$), la bifurcación tangente que sufre el 2-mapa, provoca una doble vuelta de la órbita, como se señala en la figura I.11⁴⁹.

El mapa de Poincaré sufre una duplicación de período (o flip) para $\mu = \frac{3}{4}$. En el 1-mapa de la figura I.12a se pueden observar los puntos x^+ y x^- , a los lados del punto fijo no trivial, mientras que en el 2-mapa de la figura I.12b, dichos puntos se han convertido en puntos fijos.



Considerando el 2-mapa de la figura I.12b, observamos que al aumentar el valor del parámetro, el mínimo central se mapea más abajo, mientras los máximos relativos laterales tendrán una ordenada mayor. Los puntos fijos, ahora, se producirán entre el primer máximo y el mínimo y a la derecha del segundo máximo. Si se verifica que :

⁴⁸ Dado un 1-mapa simétrico: $x_{n+1} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{2i+1}(\mu) x_n$, se puede demostrar que el 2-mapa correspondiente

adquiere la forma normal de una bifurcación tipo horquilla [26].

⁴⁹ Observar que esta doble vuelta no puede estar incluida en un plano.

$$\frac{\partial g^2}{\partial x}(x^\pm) = -1 \quad (\text{I.17})$$

en el 2-mapa, se producirá una duplicación de período que se traducirá una segunda duplicación de período, para el mapa del primer retorno.

El estudio de este fenómeno (cuyo detalle analítico no expondremos aquí) puede encararse, considerando la región próxima al mínimo central en el 2-mapa logístico (fig.I.12b). Allí se observa un pequeño mapa logístico invertido que, mediante una renormalización adecuada, se convierte en el mapa logístico original: el punto fijo no trivial del mapa original puede considerarse como el origen del nuevo mapa, mientras que el punto fijo x^- cumplirá las veces de punto fijo no trivial.

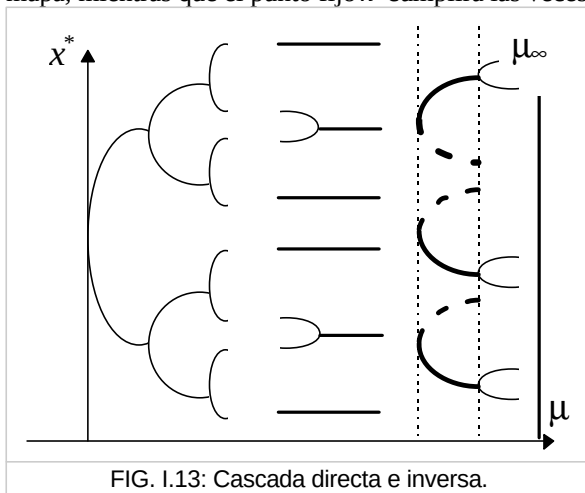


FIG. I.13: Cascada directa e inversa.

En este nuevo mapa, se observan propiedades de duplicación de período como las que describimos en la sección anterior, para un valor de parámetro $m = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{6})$, surgiendo otros dos puntos fijos, a la derecha e izquierda del punto fijo x^- . Más aún: como la zona central de sucesivos $4, 8, \dots, 2^m$ -mapas, conserva la misma propiedad, se podrán ir calculando sucesivas duplicaciones de período, llamada cascada directa, que se acumulan en $\mu_\infty = 0.99248\dots$

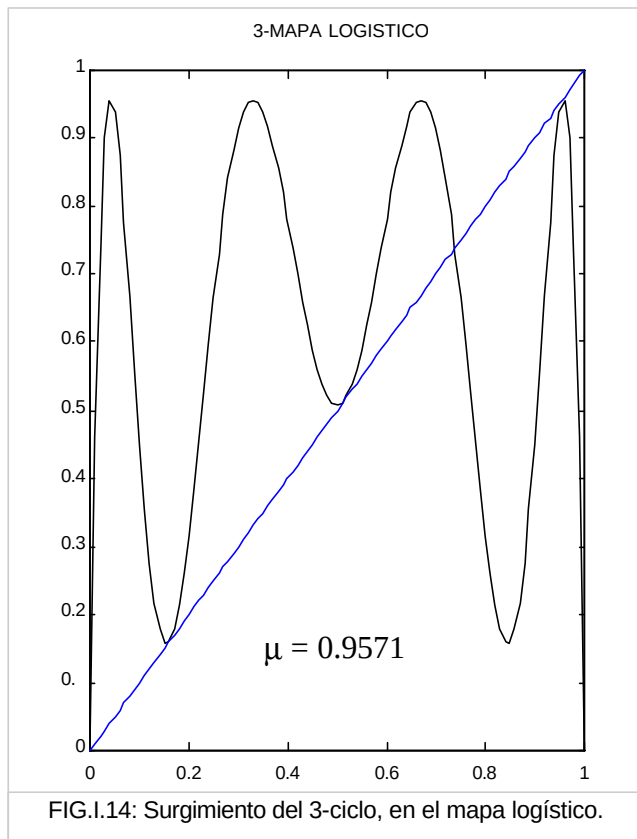
Pero, mientras la dinámica va sufriendo esta cascada directa, también se produce una cascada inversa: los puntos fijos se van uniendo dos a dos (a través de una bifurcación horquilla subcrítica), por lo que van surgiendo ciclos de

período $(2j+1)2^m$.

En la figura I.13 se esquematizan las primeras duplicaciones de período, correspondientes al inicio de la cascada directa. Se observan entonces, el 2-ciclo, el 4-ciclo y el 8-ciclo. Posteriormente y sólo a modo de esquema, se observa cómo surge el 6-ciclo, a través del 8-ciclo.

Cuando $\mu > 0.9196\dots$ el sistema pasa por “ventanas de periodicidad” de período $(2j+1)^{50}$, las cuales tienen una naturaleza diferente: considerando el 3-mapa de la figura I.14, puede observarse que, a medida que crece el parámetro, el mapa tiene tres puntos de tangencia con la recta $x_{n+3} = x_n$, por lo que se producirán en el mapa, tres bifurcaciones nodo-silla supercríticas. Los puntos fijos estables de estas bifurcaciones (que se convierten en rama, a medida que crece el parámetro) constituyen la ventana de periodicidad de período 3. La ventana de periodicidad desaparece cuando, en las ramas estables se produce una duplicación de período, dando lugar a un 6-ciclo.

⁵⁰ Se llama ventana de periodicidad al rango de valores del parámetro de control, para el cual el ciclo de período $(2j+1)$ es observable.



Sârkovskii [28] determinó un orden específico para los números naturales, como se muestra e el cuadro que sigue.

El teorema de Sârkovskii garantiza que si en un sistema dinámico existe un p -ciclo, entonces, existen todos los $(p-1)$ -ciclos anteriores, en el orden de Sârkovskii. En particular, el hecho de que en el mapa logístico se observe una ventana de periodicidad para el 3-ciclo, garantiza que este sistema dinámico posea ciclos con todos los períodos.

La cascada directa e inversa, constituyen la llamada ruta subarmónica al caos. Pese a que el valor de m puede ser tan grande como se quiera, al final de la ruta (μ_∞) , el sistema posee un caos débil, dado que cada uno de los 2^m puntos fijos se recorren en forma ordenada. Es después de este punto de acumulación que surgen los fenómenos que se estudian en este trabajo.

ORDEN DE SÂRKOVSKII	
1, 2, 4,..... $2^m, 2^{m+1}$,.....	$(2j+1)*2^{m+1}, (2j-1)*2^{m+1}$,..... $5*2^{m+1}, 3*2^{m+1}$,.....
	$(2j+1)*2^m, (2j-1)*2^m$,..... $5*2^m, 3*2^m$,.....
	$(2j+1)*2, (2j-1)*2$,..... $5*2, 3*2$,.....
	$(2j+1), (2j-1)$,.....5, 3.

APENDICE II. EL CIRCUITO DE CHUA.

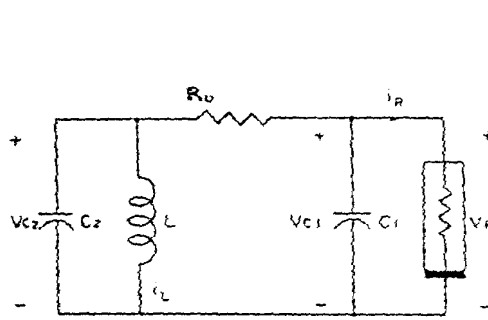


FIG. II.1a: Circuito de Chua

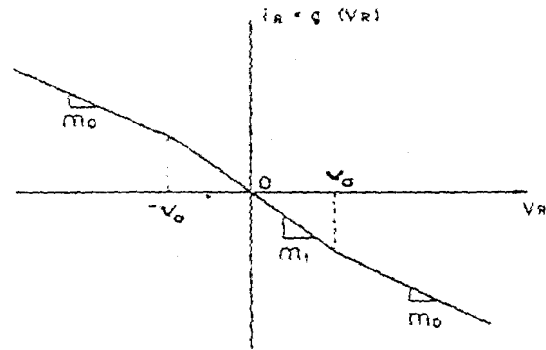


FIG. II.1b: Curva de transferencia del dispositivo R

El circuito de la figura II.1a fue presentado por primera vez por Chua [1] y consiste en un oscilador (condensador C_2 y bobina L en paralelo), una resistencia R_0 en serie con el oscilador y un condensador C_1 en paralelo con un dispositivo lineal a trazos R , cuya relación de transferencia (i_R vs v_1) se observa en la figura II.1b. El circuito más simple que permite obtener esa curva de transferencia se representa en la figura II.2 [7]. Se trata de un circuito, alimentado por una fuente de voltaje continuo V_{CC} , encargada de polarizar los transistores Q_1 y Q_2 (a través de las resistencias R_B), en región activa. Cuando la señal de entrada al dispositivo (v_1 , proveniente del oscilador) es pequeña ($|v_1| < v_0$) los diodos D_1 y D_2 no superan su voltaje umbral y se comportan como circuitos abiertos. Si v_1 es levemente positiva, aumenta la corriente de base del transistor Q_2 y el colector exige del circuito una corriente entrante que es proporcional al voltaje v_1 aplicado. Esto equivale a decir que la corriente i_R es saliente del dispositivo, teniéndose una pendiente negativa entre el voltaje de entrada y la corriente neta que circula. Cuando $v_1 > v_0$, comienza a conducir el diodo D_1 y parte de la corriente que exige el colector del transistor Q_2 , proviene de la corriente que circula por el diodo, disminuyendo de esa forma la corriente i_R en valor absoluto. Un comportamiento similar que involucra al transistor Q_1 y al diodo D_2 , se verifica para los valores de v_1 negativos.

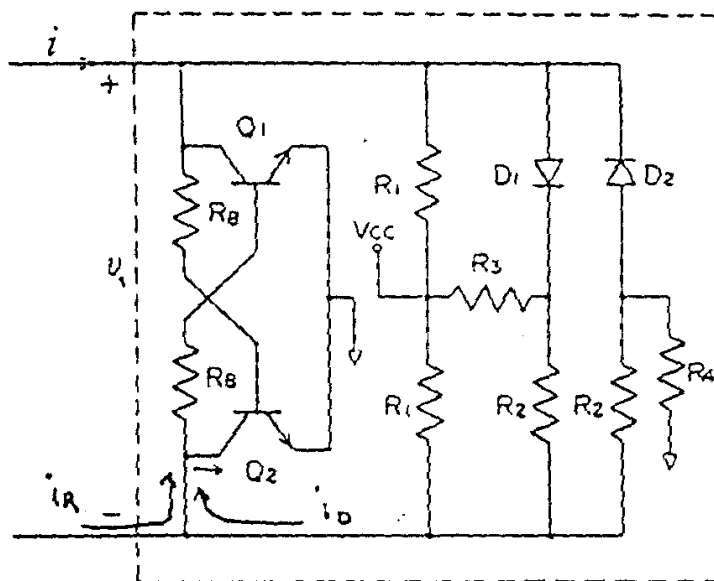


FIG. II.2 : Circuito de implementación del dispositivo R [7].

La misma curva de transferencia puede implementarse con dispositivos más sofisticados [10] e incluso existe un integrado C-MOS para implementar el circuito de la figura II.1a, en su conjunto [17].

II.1. ECUACIONES.

Aplicando las leyes de Kirchhoff al circuito de la figura II.1a y teniendo en cuenta las variables señaladas en la figura, obtenemos:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{R_0} (v_1 - v_2) - i_R \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{R_0} (v_2 - v_1) + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} &= -v_2 \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

donde la corriente por la resistencia de pendiente negativa verifica:

$$i_R = \begin{cases} -m_0 v_1 + (m_0 - m_1) v_0 & v_1 \geq v_0 \\ -m_1 v_1 & |v_1| \leq v_0 \\ -m_0 v_1 + (m_1 - m_0) v_0 & v_1 \leq -v_0 \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

siendo m_0 y m_1 los módulos de las pendientes en los diferente tramos de linealidad (Fig.II.1b).

Si tomamos las variables adimensionadas:

$$x = \frac{v_1}{v_0} \quad y = \frac{v_2}{v_0} \quad z = \frac{i_L R_0}{v_0} \quad t = \frac{t}{R_0 C_2} \quad (\text{II.3})$$

obtenemos ecuaciones dependientes de los parámetros a y b :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a (y - h(x)) \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z \\ \frac{dz}{dt} = -b y \end{cases} \quad a = \frac{C_2}{C_1} \quad b = \frac{R_0^2 C_2}{L} \quad (\text{II.4})$$

$$\text{con } h(x) = \begin{cases} bx + a - b & x \geq 1 \\ ax & |x| \leq 1 \\ bx - a + b & x \leq -1 \end{cases} \quad y \quad a = 1 - R_0 m_1 \quad b = 1 - R_0 m_0 \quad (\text{II.5})$$

El sistema de ecuaciones (II.4-5) es simétrico respecto del origen y presenta tres puntos de equilibrio que verifican:

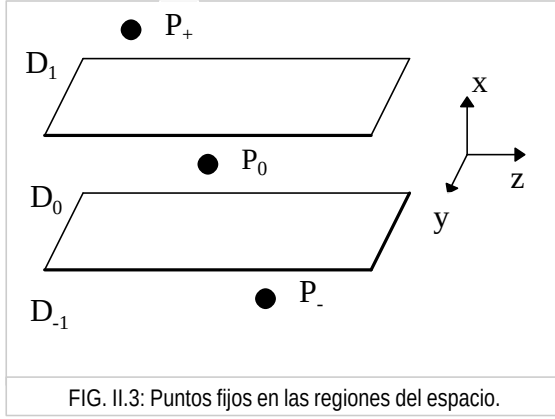
$$y = 0 \quad x = -z \quad h(x) = 0 \quad \begin{cases} x = \frac{b-a}{b} \\ x = 0 \\ x = \frac{a-b}{b} \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

La existencia de esos puntos de equilibrio está dada por la condición:

$$m_0 \neq \frac{1}{R_0} \quad (\text{II.7})$$

Pero además definiendo las regiones:

$$D_1 \equiv \{(x, y, z) / x \geq 1\} \quad D_0 \equiv \{(x, y, z) / |x| \leq 1\} \quad D_{-1} \equiv \{(x, y, z) / x \leq -1\}$$



e imponiendo que los puntos de equilibrio (II.6) se encuentren en diferentes regiones, tenemos una condición adicional para la pendiente del dispositivo R en la región D_0 :

$$m_1 \geq \frac{1}{R_0} \quad (II.8)$$

De esa forma los puntos de equilibrio serán:

$$\begin{aligned} P_+ &= (k, 0, -k) \\ P_0 &= (0, 0, 0) \\ P_- &= (-k, 0, k) \end{aligned} \quad (II.9)$$

donde : $k = \frac{b-a}{b}$

Y el sistema de ecuaciones puede expresarse en forma simple:

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = A(a, b, c) \vec{X} / \quad \vec{X} = (x - K, y, z + K) \quad \text{donde} \quad K = \begin{cases} k & \text{en } D_1 \\ -k & \text{en } D_{-1} \end{cases} \quad (II.10)$$

$$\text{donde } A(a, b, c) = \begin{pmatrix} -a & c & a \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix} \quad \text{siendo } c = \begin{cases} b & \text{en } D_1 \\ a & \text{en } D_0 \\ b & \text{en } D_{-1} \end{cases} \quad (II.11)$$

El sistema de ecuaciones (II.4-5) es lineal a trazos, por lo tanto la matriz jacobiana que determina los autovalores, calculada en los puntos de equilibrio, coincide con la matriz $A(a, b, c)$.

Pese a que el sistema (II.4-5) es un sistema lineal, la linealidad a trazos y las pendientes negativas de la curva de transferencia de la figura II.1b, hacen que el circuito en muchas oportunidades tenga un comportamiento topológicamente equivalente al de un sistema no lineal. Por esa razón, algunos autores trabajan con una curva de transferencia polinómica de tercer grado, la cual permite determinar algunos resultados analíticamente.

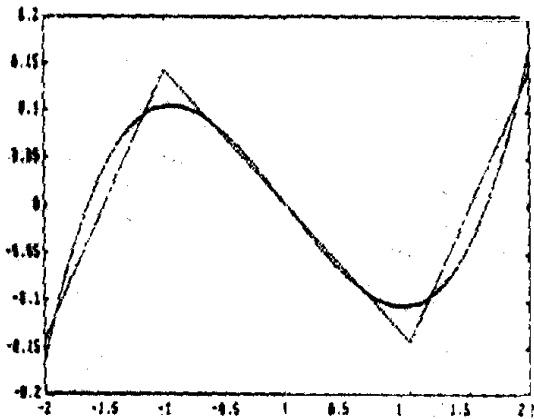


FIG. II.4 : Gráfica comparativa de las curvas de transferencia (II.5) y (II.12) para los parámetros:
 $a = -1/7$ $b = 2/7$ $c_1 = 1/16$ $c_3 = -1/6$

$$h(x) = c_1 x^3 + c_3 x \quad (II.12)$$

La figura II.4 compara la curva de transferencia (II.5) con la expresada en la ecuación (II.13). Utilizando ésta curva de transferencia, también podemos encontrar puntos fijos que verifican ecuación II.9, con: $k = \sqrt{-\frac{c_3}{c_1}}$ y una matriz jacobiana calculada en ellos (ec.II.11) con:

$$c = h'(x) = \begin{cases} c_3 & \text{en } P_0 \\ -2c_3 & \text{en } P_{\pm} \end{cases}$$

En un trabajo anterior [18], trabajando con el sistema (II.4-13), obtuvimos las variedades con el sistema (II.4-13), obtuvimos las variedades de los puntos fijos del sistema (II.4) tiene, con

la curva de transferencia II.13 un comportamiento completamente análogo al sistema lineal a trazos (curva de transferencia II.5)⁵¹.

II.2. BIFURCACIONES LOCALES.

Nos proponemos investigar alguna de las propiedades que presentan los autovalores de la matriz jacobiana (II.11) tanto en el punto P_0 , como en los puntos P_+ y P_- , cuando variamos los parámetros a y b (positivos) y fijamos a negativo (verificando la condición II.8) y b positivo (verificando la condición II.7)⁵².

El polinomio característico de esta matriz está dado por:

$$P(l) = l^3 + p_1 l^2 + p_2 l + p_3 \quad (\text{II.13})$$

donde $p_1 = 1 + a$ $p_2 = a c + b - a$ $p_3 = a b c$

Lo primero que se observa es que tanto para P_0 como para $P_{\pm}$, el término independiente del polinomio (II.13) no se anula, lo cual implica que no existen autovalores nulos. Esto nos permite afirmar que: si existiese un comportamiento topológicamente equivalente al de una bifurcación local de codimensión 1, ésta sería de tipo Hopf.

II.2.1. ANÁLISIS PARA P_0 .

Evaluando el polinomio característico (II.13) para el punto P_0 , obtenemos:

$$\begin{aligned} p_{10} &= 1 + a \quad a = -(l_0 + l_1 + l_2) \\ p_{20} &= a(a-1) + b = l_0 l_1 + l_0 l_2 + l_1 l_2 \\ p_{30} &= a b \quad a = -l_0 l_1 l_2 < 0 \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

y observando la tercer ecuación (II.14), podemos afirmar que una de las raíces del polinomio característico evaluado en P_0 es necesariamente real y positiva (l_0), mientras que las otras dos raíces (l_1 y l_2) pueden ser reales de igual signo o complejos conjugados.

Además, sabiendo que existe una raíz real, puede determinarse que las raíces (l_1 y l_2) son iguales $l_1 = l_2 = l$, cuando se verifica que:

$$\begin{aligned} 3l^2 + 2p_{10}l + p_{20} &= 0 \\ l &= \frac{p_{10}p_{20} - 9p_{30}}{2(3p_{20} - p_{10}^2)} \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

Estas relaciones determinan una ecuación en a y b que oficia de frontera entre las raíces reales y las raíces complejas del polinomio característico evaluado para P_0 . Llamaremos a esta frontera s_1 y su gráfica puede observarse en la figura II.4: por debajo de s_1 , l_1 y l_2 son reales, mientras que por encima de s_1 , l_1 y l_2 son complejas.

Cuando las raíces son reales, como l_1 y l_2 no pueden anularse, mantendrán su signo y por lo tanto mantendrán el tipo de estabilidad del punto P_0 . Para determinar su estabilidad basta investigar el caso particular que verifica:

$$l_0 = -l_1 = -l_2 \quad (\text{II.16})$$

Sustituyendo esta condición en el polinomio (II.14), encontramos que la misma se verifica en un punto de la curva s_1 (punto A de la figura II.5). Entonces, dado que el caso

⁵¹ En este trabajo se empleó el sistema (II.4-5) pues la curva de transferencia lineal a trazos, demostró un mejor ajuste entre los datos experimentales y computacionales.

⁵² Los valores de los parámetros a y b en este trabajo se han fijado en: $a = -\frac{1}{7}$ $b = \frac{2}{7}$

particular es posible para valores positivos de los parámetros y que los autovalores no cambian de signo podemos afirmar que:

Por debajo de s_1 el punto de equilibrio P_0 es un punto silla.

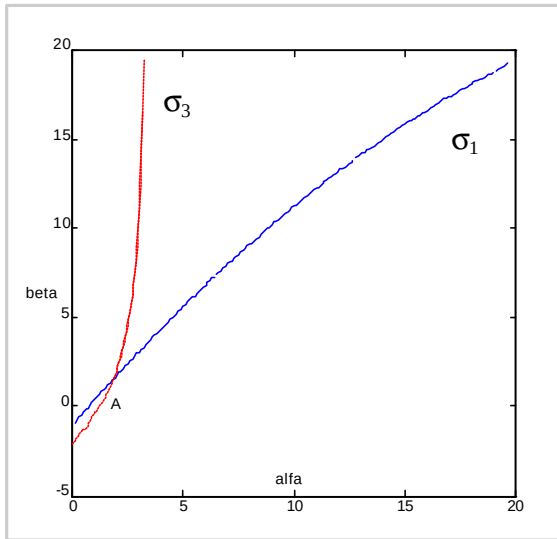


FIG. II.5 : Comportamiento de las raíces del polinomio característico, evaluado en P_0 .

Cuando l_1 y l_2 son complejos conjugados, el punto P_0 podría sufrir una bifurcación de Hopf, en el plano (a, b) . Sin embargo, sustituyendo la condición:

$$l_1 = -l_2 = iw \quad (II.17)$$

en los coeficientes del polinomio característico (II.14), puede determinarse que esta condición es incompatible con valores de a y b positivos, por lo que se deduce que el punto P_0 no sufre bifurcaciones de codimensión 1. La parte real de l_1 y l_2 , entonces, no cambia de signo y aquí también (por encima de s_1) se mantiene el tipo de estabilidad del punto P_0 . El caso particular:

$$l_0 = -\text{Re}(l_1) = -\text{Re}(l_2) \quad (II.18)$$

se verifica a lo largo de la curva s_3 para

valores de a y b por encima de s_1 y al no verificarse un cambio de signo en la parte real de las raíces complejas, puede afirmarse que:

Por encima de s_1 , el punto P_0 es un punto silla-foco.

II.2.2. ANÁLISIS PARA $P_{\pm}$.

Analizaremos ahora las propiedades de los autovalores de la matriz jacobiana, evaluada en los puntos de equilibrio P_+ y P_- , a los cuales llamaremos r .

Evaluando el polinomio característico (II.13) para los puntos $P_{\pm}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} p_{11} &= 1 + a \quad b = -(r_0 + r_1 + r_2) \\ p_{21} &= a \quad (b-1) + b = r_0 r_1 + r_0 r_2 + r_1 r_2 \\ p_{31} &= a \quad b \quad b = -r_0 r_1 r_2 > 0 \end{aligned} \quad (II.19)$$

y observando la tercer ecuación, podemos afirmar que una de las raíces es necesariamente real y negativa (r_0), mientras las otras dos raíces (r_1 y r_2) pueden ser reales de igual signo, o complejas conjugadas. La condición de separación entre estos dos tipos de soluciones, (condición para $P_{\pm}$ equivalente a la presentada en las ecs. (II.15) para el punto P_0), queda por debajo del eje $a = 0$, por lo tanto, las únicas raíces posibles son r_1 y r_2 complejas. Para buscar la existencia de una bifurcación de Hopf para los puntos $P_{\pm}$, imponemos en (II.19) la condición:

$$r_1 = -r_2 = iw \quad (II.20)$$

y obtenemos una relación que señala la existencia de una bifurcación de Hopf a lo largo de la curva:

$$b = a(1-b)(1+a \quad b) \quad (II.21)$$

Esto significa que a la izquierda de la curva (II.20), la parte real de los autovalores $r_{1,2}$ es negativa, por lo que $P_{\pm}$ son estables, mientras que a la derecha, los puntos fijos tienen por variedad inestable local un plano (x_1, y_1) ⁵³.

Para la ecuación (II.4) sólo se tienen datos numéricos que confirman la existencia de esta bifurcación, pero aplicando el teorema de la variedad central a un sistema cuya curva de transferencia esté modelada por un polinomio de tercer orden, Altman [14] deduce la forma normal de la ecuación para $s_1 \cong 0$:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= s_1 r + m_1 r^3 + o(|r, q, s_1|^4) \\ \dot{q} &= w + o(|r, q, s_1|^4)\end{aligned}\tag{II.22}$$

donde r es el radio del ciclo límite alrededor de los puntos $P_{\pm}$ sobre la superficie $(z_1 = S(x_1, y_1, s))$ (variedad central de los puntos $P_{\pm}$) y q es el ángulo de fase sobre dicho ciclo. No es el propósito de este trabajo ahondar en los detalles del cálculo, pero es razonable pensar que el término x^3 de la curva de transferencia redundarán en términos en r^3 en la forma normal.

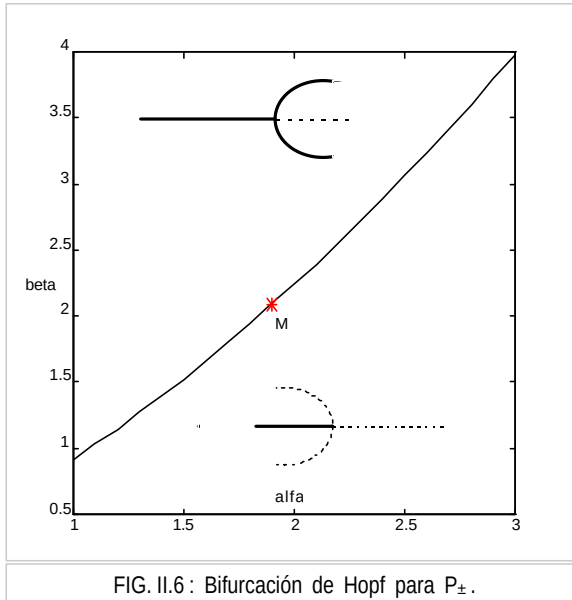


FIG. II.6: Bifurcación de Hopf para $P_{\pm}$.

El parámetro m_1 puede expresarse en función de los parámetros a y b . Su signo indica si la bifurcación de Hopf es subcrítica ($m_1 < 0$) o supercrítica ($m_1 > 0$). En la figura 1.6 se señala (punto M) que existen valores de a y b para los cuales m_1 cambia de signo sobre la curva. Se dibujan, también, en forma esquemática en función de uno de los parámetros, la estabilidad de los puntos y ciclos que protagonizan la bifurcación. Por ejemplo, por encima del punto M la bifurcación de Hopf es supercrítica, dando lugar a un ciclo límite estable a la derecha de la curva.

⁵³ Los autovalores y autovectores verifican, cerca de la bifurcación:

$$\begin{aligned}r_0 < 0 &\Rightarrow z_1 \\ r_{1,2} &= s_1 \pm iw_1 \Rightarrow (x_1, y_1)\end{aligned}$$

APENDICE III.
ESTUDIO CUANTITATIVO DEL ATRACTOR DE CHUA [9].

Para hacer un estudio más detallado y cuantitativo del comportamiento del sistema (1.1) en la región del plano de parámetros (a, b) para la cual se observa el Atractor de Chua, será necesario trabajar con nuevas coordenadas en las regiones D_0 y $D_{\pm 1}$ (ver figura 2.4), de modo tal de definir mapas de retorno sobre el plano U_1 . La composición de estos mapas, conducirán a la definición de un mapa de Poincaré, que permitirá estudiar las condiciones del Nacimiento y la Muerte del Doble Scroll.

III.1. CAMBIO DE VARIABLE.

Comenzaremos definiendo nuevas coordenadas (x_0, y_0, z_0) en D_0 , de modo tal que, aplicando una transformación lineal Ψ_0 , el plano que constituye la variedad estable del punto P_0 se convierta en el plano $z_0 = 0$ y la variedad inestable del origen se convierta en una recta perpendicular a dicho plano:

$$E^U(P_0) \xrightarrow{\Psi_0} (0, 0, z_0) \quad E^S(P_0) \xrightarrow{\Psi_0} z_0 = 0$$

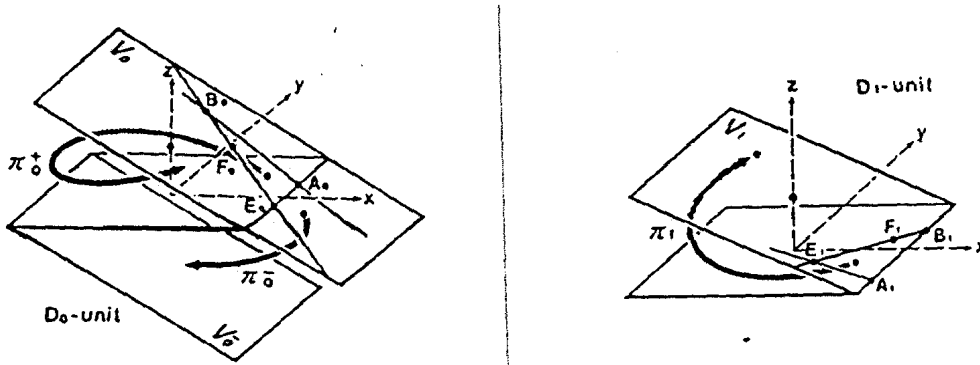
Además, la transformación lineal Ψ_0 transformará el punto P_0 en el origen de las nuevas coordenadas y las fronteras entre los dominios (planos $U_{\pm 1}$) en planos $V_0^{\pm}$ definidos como:

$$\Psi_0: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / \begin{cases} \Psi_0(0) = 0 \\ V_0 = \Psi_0(U_1) = \{(x_0, y_0, z_0) / x_0 + z_0 = 1\} \\ V_0^- = \Psi_0(U_{-1}) = \{(x_0, y_0, z_0) / x_0 + z_0 = -1\} \end{cases} \quad (III.1)$$

Entonces, el sistema (1.1), en las nuevas coordenadas podrá escribirse como⁵⁴:

$$\frac{d\vec{x}_0}{dt} = \frac{1}{w_0} D\Psi_0 \left(f \left(\Psi_0^{-1}(\vec{x}_0) \right) \right) = \begin{pmatrix} \tilde{s}_0 & -1 & 0 \\ 1 & \tilde{s}_0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{g}_0 \end{pmatrix} \vec{x}_0 \quad (III.2)$$

En la figura III.1a se muestran la variedades estable e inestable de P_0 , así como los planos V_0 y V_0^- .



En forma similar, definiremos nuevas coordenadas (x_1, y_1, z_1) y una nueva transformación lineal Ψ_1 que aplicada a las variedades inestable y estable del punto P_+ las transforme en el plano $z_1=0$ y una recta perpendicular a dicho plano, respectivamente:

$$E^S(P_+) \xrightarrow{\Psi_1} (0, 0, z_1) \quad E^U(P_+) \xrightarrow{\Psi_1} z_1 = 0$$

teniendo en cuenta para ello, que la matriz de cambio de base Ψ_1 transformará el punto fijo P_+ en el origen de las nuevas coordenadas y el plano U_1 en el plano V_1 :

FIG.III.1a : Variedades de P_0 y planos $x = \pm 1$ a través de la transformación: Ψ_0

FIG.III.1b : Variedades de P_+ y plano $x = 1$ a través de la transformación: Ψ_1

⁵⁴ Para los valores típicos de los parámetros a y b , mencionados en la sección 2.2, los autvalores normalizados de la matriz jacobiana calculada en los puntos fijos P_0 y $P_{\pm}$ son respectivamente:

$$\tilde{s}_0 = \frac{s_0}{w_0} = -0,358 \quad \tilde{g}_0 = \frac{g_0}{w_0} = -0,819 \quad \tilde{s}_1 = \frac{s_1}{w_1} = 0,062 \quad \tilde{g}_1 = \frac{g_1}{w_1} = -1,29$$

$$\Psi_1: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3 / \left\{ \begin{array}{l} \Psi_1(P_+) = 0 \\ V_1 = \Psi_1(U_1) = \{(x_1, y_1, z_1) / x_1 + z_1 = 0\} \end{array} \right\} \quad (\text{III.3})$$

El sistema (1.1), en las nuevas coordenadas, será:

$$\frac{d\vec{x}_1}{dt} = \frac{1}{w_1} D\Psi_1 \left(f \left(\Psi_1^{-1}(\vec{x}_1) \right) \right) = \begin{pmatrix} \tilde{s}_1 & -1 & 0 \\ 1 & \tilde{s}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{g}_1 \end{pmatrix} \vec{x}_1 \quad (\text{III.4})$$

En la figura III.1b se muestran las variedades estable e inestable del punto P_+ , en las nuevas coordenadas, así como al plano V_1 correspondiente al plano U_1 , como señala la ecuación (III.3). Vale señalar que es posible pasar de las coordenadas (x_0, y_0, z_0) a las coordenadas (x_1, y_1, z_1) , a través de una función f que, teniendo en cuenta que el sistema (1.1) es continuo en U_1 , será de la forma:

$$f = (\Psi_1|_{U_1}) \circ (\Psi_0|_{U_1})^{-1} \quad (\text{III.5})$$

Más adelante tendremos una definición más cuidadosa de esta función, pero puede observarse que, aplicando las transformaciones Ψ_0 y Ψ_1 a las rectas y puntos importantes para la dinámica (definidos en la sección 2.2), logramos ubicarlos en V_0 y V_1 , (fig.III.1), respectivamente). Por ejemplo: $\Psi_0(A) = A_0$ $\Psi_1(A) = A_1$.

III.2 MAPA DE MEDIO RETORNO EN EL PLANO V_0 .

En el capítulo 2 se estudian los flujos del sistema (1.1), que se inician en el plano U_1 , recorren la región D_0 e inciden en el plano U_1 o en el plano U_1 . Nos proponemos definir un mapa en el espacio (x_0, y_0, z_0) , tal que a cada punto del plano $V_0 = \Psi_0(U_1)$, le corresponda un punto imagen en el plano V_0 .

En primera instancia consideramos el flujo que comienza en el triángulo $A_0B_0E_0$ del plano V_0 (ver figura III.1a). El flujo (al estar a la izquierda de la recta $E_0A_0 = \Psi_0(L_0)$), se mantendrá en el espacio limitado por el plano V_0 y el plano $z_0=0$, para regresar a algún punto de V_0 , que se encuentre a la izquierda de la recta $E_0B_0 = \Psi_0(L_2)$ ⁵⁵.

Entonces, para cada flujo j_0 que parte de un punto $\vec{x}_0$ del triángulo $A_0B_0E_0$, definimos el mapa de retorno p_0^+ , teniendo en cuenta el tiempo (mínimo) T que se demora en volver a incidir en el plano V_0 :

$$p_0^+: \Delta A_0B_0E_0 \rightarrow V_0 / p_0^+(\vec{x}_0) = j_0^T(\vec{x}_0) / T = T(\vec{x}_0) = \inf\{t > 0, j_0^t(\vec{x}_0) \in V_0\} \quad (\text{III.6})$$

Por otro lado, las trayectorias que parten de puntos que están a la derecha de E_0A_0 , recorren el espacio (x_0, y_0, z_0) , por debajo del plano $z_0=0$ y llegan a V_0^- , como señala la figura III.1a⁵⁶. Entonces, podrá definirse el mapa p_0^- , teniendo en cuenta el tiempo (mínimo) T que demora el flujo j_0 en llegar desde el plano V_0 al plano V_0^- :

$$p_0^-: (\angle A_{0+}B_0E_{0+} - \Delta A_0B_0E_0) \rightarrow V_0^- / \left\{ \begin{array}{l} p_0^-(\vec{x}_0) = j_0^T(\vec{x}_0) / \\ T = T(\vec{x}_0) = \inf\{t > 0, j_0^t(\vec{x}_0) \in V_0^-\} \end{array} \right\} \quad (\text{III.7})$$

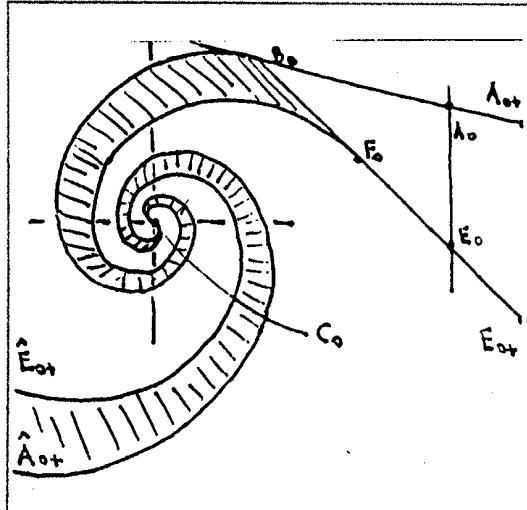
Así, el mapa de medio retorno (o sea el mapa que lleva los puntos de V_0 en V_0) será de la forma:

$$p_0: \angle A_{0+}B_0E_{0+} \rightarrow V_0 / p_0(\vec{x}_0) = \begin{cases} p_0^+(\vec{x}_0) & \vec{x}_0 \in \Delta A_0B_0E_0 \\ -p_0^-(\vec{x}_0) & \vec{x}_0 \in (\angle A_{0+}B_0E_{0+} - \Delta A_0B_0E_0) \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

donde a cada punto de incidencia en V_0^- le corresponde un punto de V_0 de coordenadas simétricas.

⁵⁵ Recordamos que en el espacio (x, y, z) , el flujo que parte del triángulo ABE, se mantiene en el semiespacio superior, definido por la variedad estable del origen (ver fig.2.4).

⁵⁶ En el espacio (x, y, z) eso corresponde a partir del plano U_1 , recorre el espacio D_0 por debajo de la variedad estable del punto P_0 , e incidir en el plano U_{-1} (ver figura 2.4).



Las consecuencias de aplicar este mapa a los puntos del ángulo $A_0B_0E_0$ se observan en la figura III.2a: el triángulo $A_0B_0E_0$ se mapea en la zona encerrada por las espirales que comienzan en los puntos B_0 y F_0 y convergen hacia el punto C_0 ; la zona del ángulo $A_0B_0E_0$ que no incluye al triángulo (zona limitada por el segmento de recta A_0E_0 y por las semirrectas A_0A_{0+} y E_0E_{0+}) lo hace en la región encerrada por las espirales que partiendo del punto C_0 , van hacia puntos $\hat{A}_{0+}$ y $\hat{E}_{0+}$, imágenes de los puntos A_{0+} y E_{0+} , respectivamente. Este resultado es posible sólo si completamos la definición del mapa de medio retorno, observando cómo es su comportamiento en las fronteras del dominio:

Lo primero que observamos es que una trayectoria que parte de puntos en el segmento E_0A_0 , permanece sobre el plano $z_0=0$ y no retorna a V_0 . Definimos, en el entendido de que ese retorno se produce en un tiempo infinito:

$$p_0(\vec{x}_0) = C_0 \quad \forall \vec{x}_0 \in \overline{E_0A_0} \quad (III.9)$$

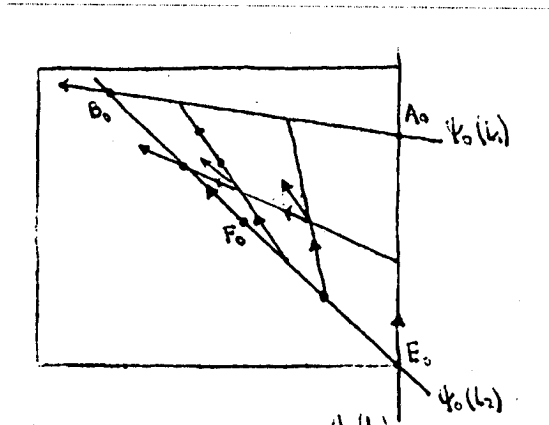


FIG.III.2a: Portarretrato en el plano V_0 . Imagen del ángulo $A_0B_0E_0$.

En segunda instancia, observamos que el mapa de medio retorno es discontinuo en el segmento F_0B_0 : el flujo que pasa por los puntos del segmento es tangente al plano V_0 (porque estos puntos pertenecen a la recta $\Psi_0(L_2)$) y se dirige hacia la izquierda del segmento; mientras que el flujo que pasa por puntos $\vec{x}_0$ en el triángulo $A_0B_0E_0$ y son cercanos al segmento F_0B_0 , será entrante al plano V_0 y se dirigirá (en la dirección paralela a este plano) hacia la derecha del segmento. En la figura III.2b se esquematiza esta situación, señalándose la proyección (en la dirección paralela al plano V_0) de los vectores directrices⁵⁷ del flujo que pasa por diferentes puntos del triángulo $A_0B_0E_0$ y sus fronteras⁵⁸. Para soslayar esta discontinuidad, se definen los puntos del segmento F_0B_0 como puntos fijos del mapa de medio retorno:

$$p_0(\vec{x}_0) = \vec{x}_0 \quad \forall \vec{x}_0 \in F_0B_0 \quad (III.10)$$

III.3. MAPA DE MEDIO RETORNO EN EL PLANO V_1 .

A través de la transformación lineal Ψ_1 , podemos definir para los puntos del espacio (x_1, y_1, z_1) , el mapa de medio retorno que conecte los puntos de llegada al ángulo $A_1B_1E_1$ (en el plano V_1) con los puntos de partida (también en V_1) y tenga en cuenta las trayectorias que pasaron entre el plano $z_1=0$ y V_1 (ver figura III.1b)⁵⁹:

$$p_1: \angle A_1B_1E_1 \rightarrow V_1 \quad / p_1(\vec{x}) = j_1^{-T}(\vec{x}_1) \quad / T = T(\vec{x}_1) = \inf\{t > 0, j_1^{-t}(\vec{x}_1) \in V_1\} \quad (III.11)$$

⁵⁷ El vector directriz del flujo, evaluado en determinado punto, señala hacia dónde va la trayectoria que

FIG.III.2b: Portarretrato en el plano V_0 . Vectores directrices del flujo.

vector velocidad. En el segmento E_0F_0 , ya que el flujo que pasa por puntos del triángulo $A_0B_0F_0$, próximos a ese segmento, tiene la misma dirección que el flujo que pasa por puntos del segmento.

⁵⁹ Esto corresponde a considerar en el espacio (x, y, z) el flujo que, a tiempos negativos recorre la región D_1 .

Pero la definición de p_1 todavía no está completa, dado que el mapa requiere definiciones adicionales donde la dirección del flujo presente discontinuidades, como en el caso anterior.⁶⁰

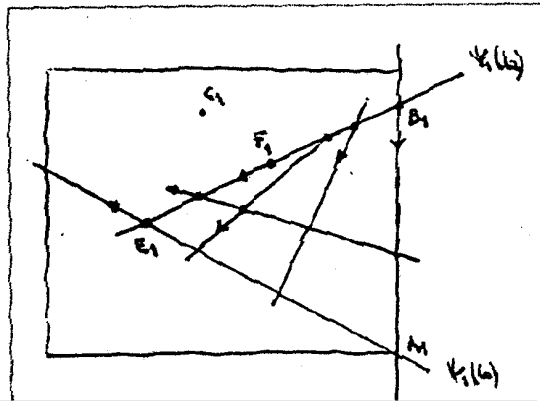


FIG. III.3.b: Portarretrato en el plano V_1 . Imagen del ángulo $A_1B_1E_1$.

En la figura III.3a se esquematizan las proyecciones (en el plano V_1) de los vectores directrices del flujo, evaluados en algunos puntos del triángulo $A_1B_1E_1$. Puede observarse que p_1 es continua en el segmento de recta F_1B_1 ya que los flujos que llegaron a puntos cercanos al segmento y a la derecha de $\Psi_1(L_2)$ tienen su vector directriz en aproximadamente la misma dirección que los puntos del segmento. Sin embargo, si consideramos aquellos puntos cercanos a F_1E_1 (en el triángulo $A_1B_1E_1$) encontraremos que la dirección del flujo que llega a ellos, es claramente diferente a la dirección del flujo que llega a los puntos que pertenecen al segmento. Es por ello, que el segmento F_1E_1 contendrá, por definición, los puntos fijos del mapa:

$$p_1(\bar{x}_1) = \bar{x}_1 \quad \forall \bar{x}_1 \in \overline{F_1E_1} \quad (\text{III.12})$$

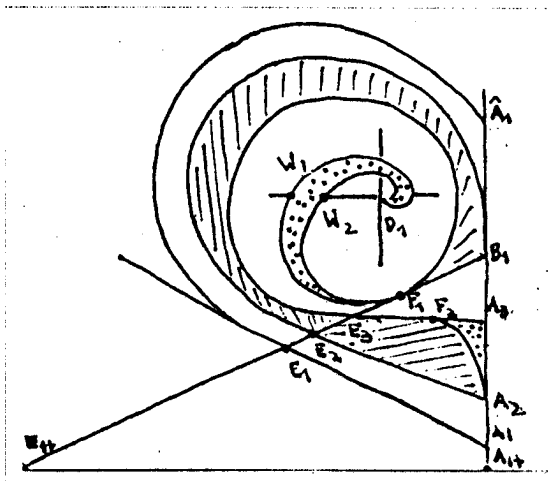


FIG. III.3a: Portarretrato en el plano V_1 . Vectores directrices del flujo.

En la figura III.3b se señala la imagen (a través de p_1) de los puntos $\bar{x}_1$ del triángulo $A_1B_1E_1$. Por ejemplo, la imagen del segmento E_1A_1 está dada por la espiral $E_1\hat{A}_1$ ⁶¹:

$$p_1(\overline{E_1A_1}) = E_1\hat{A}_1 \quad (\text{III.13})$$

Todos los segmentos de la forma E_iA_i tienen una imagen similar en el mapa. No se ha dibujado la imagen de un segmento $E_{1+}A_{1+}$, pero es fácil ver que corresponde a una parte de espiral que rodea a la curva $E_1\hat{A}_1$ e incide en la recta $\Psi_1(L_1)$, en un punto $\hat{A}_{1+}$.

Pero si a medida que nos acercamos a B_1 , los segmentos de la forma E_iA_i , se mapean en curvas del tipo $E_i\hat{A}_i$ (de radio decreciente), existirá un punto A_2 tal que el segmento E_2A_2 , se mapee en la curva E_2B_1 . Adicionalmente, le pediremos a esta imagen que sea tangente a $\Psi_1(L_1)$ en el punto B_1 :

$$p_1(\overline{E_2A_2}) = E_2B_1 \quad (\text{III.14})$$

Consideramos ahora, la imagen de un punto A_i que se encuentre entre B_1 y A_2 y definimos el mapa de medio retorno para estos puntos, como ⁶²:

⁶⁰ Vale hacer notar que el vector directriz del flujo que llega, evaluado en determinado punto, está dado en este caso por el opuesto de la velocidad en ese punto.

⁶¹ El punto E_1 es un punto fijo del mapa (ec. III.12) y el punto $\hat{A}_1$ es la imagen del punto A_1 . Podría pensarse que para los puntos de la semirrecta B_1A_{1+} , habría una definición análoga a la de la ecuación I.9, que (a tiempo infinito) llevara los puntos de esta semirrecta al punto D_1 . Sin embargo, para los puntos de la semirrecta A_2A_{1+} esto no es posible: considerando el flujo que a tiempos negativos, parte del punto A (fig. 2.4), observaremos una espiral que se va cerrando hacia el punto P_+ . Sin embargo, por ser la parte real del autovalor complejo no muy grande en módulo, el radio de esta espiral no decrece mucho y la misma incidirá en el plano U_1 , antes de completarse. El mapa de medio retorno considera a este punto $\hat{A}$, como imagen del punto A .

⁶² En el espacio (x,y,z) corresponderá a observar (a tiempos negativos) la trayectoria que parte de un punto que se encuentra sobre la recta L_1 , a la izquierda de B y cerca de este punto. Dicha trayectoria, comenzará con un radio (medido desde el punto P_+), suficientemente pequeño como para mantenerse en el plano $E^U(P_+)$ (por encima del plano U_1) de modo tal de llegar (a tiempo $-\infty$) al punto P_+ (ver figura 2.4).

$$p_1(\overline{B_1 A_2}) = D_1 \quad (\text{III.15})$$

La imagen de los segmentos de la forma $\overline{E A_i}$ con A_i entre B_1 y A_2 , es una espiral de radio decreciente que converge hacia el punto D_1 . En particular, existe un segmento $E_3 A_3$ que tendrá por imagen una espiral $E_3 W_1 D_1$, que sea tangente a $\Psi_1(L_2)$ en el punto F_1 :

$$p_1(\overline{E_3 A_3}) = E_3 F_1 W_1 D_1 \quad (\text{III.16})$$

En relación con esta espiral, debemos notar que existe un punto F_2 en el segmento $E_3 A_3$, cuya imagen es el punto F_1 y dado que ese punto era un punto fijo del mapa (ec.III.12):

$$p_1(F_2) = F_1 = p_1(F_1) \quad (\text{III.17})$$

Entonces, la imagen del segmento $E_3 F_2$ será la curva $E_2 F_1$ (parte de la espiral definida en III.17), mientras que la imagen del segmento $F_2 A_3$, será la curva $F_1 W_1 D_1$ y al verificarse la ecuación III.15, existirá una curva $F_2 A_2$, tal que la zona encerrada por los puntos $E_2 E_3 F_2 A_2$ se mapeará en la zona encerrada por $E_2 E_3 F_1 B_1$ (zonas rayadas de la figura III.3a:

$$p_1(F_2 A_2) = F_1 B_1 \quad (\text{III.18})$$

Pero aplicando la ecuación III.12 al punto F_1 y la ecuación III.15 al punto B_1 , concluiremos que la imagen del segmento $F_1 B_1$ es otra espiral $F_1 W_2 D_1$:

$$p_1(\overline{F_1 B_1}) = F_1 W_2 D_1 \quad (\text{III.19})$$

Por lo que, la zona encerrada por los puntos $F_2 A_3 A_2$, se mapeará entre las espirales $F_1 D_1$ (zonas punteadas en la figura III.3b), con lo cual se concluye que inevitablemente, el mapa es discontinuo en el segmento $F_2 A_2$.

Por último, diremos que p_1^{-1} se conoce como el mapa de retorno inverso. Este mapa juega un papel importante en la definición del mapa de Poincaré, como se verá en la próxima sección. Dado que el punto D_1 es la imagen a través de p_1 de todos los puntos del segmento $B_1 A_2$ (ec.III.15) y que el punto F_1 es la imagen a través del mapa p_1 de los puntos F_1 y F_2 (ec.III.17) el mapa de retorno inverso no está bien definido para D_1 y F_1 . Además, dado que p_1 es discontinua en $F_2 A_2$, el mapa de retorno inverso es discontinuo en la espiral $F_1 W_1 D_1$, puesto que de las ecuaciones (III.18) y (III.19) se deduce:

$$p_1(F_2 A_2) = F_1 B_1 = p_1^{-1}(F_1 W_2 D_1) \quad (\text{III.20})$$

III.3 MAPA DE CONEXION Y MAPA DE POINCARÉ.

Para poder construir el mapa de Poincaré, en el plano U_1 , debemos tener en cuenta el mapa que conecta las figuras III.2a y III.3b:

$$f = (\Psi_1|_{U_1}) \circ (\Psi_0|_{U_1})^{-1} \quad (III.21)$$

El cálculo de este mapa es muy sencillo, si se tiene en cuenta que tenemos determinados tres puntos A_0 , B_0 y E_0 que se convertirán en A_1 , B_1 y E_1 (cuando se les aplique f) y además, se verifica para los planos V_0 y V_1 (transformados de U_1 a través de Ψ_0 y Ψ_1): $z_i = 1 - x_i \quad i = 0, 1$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x_0 - A_{0x} \\ y_0 - A_{0y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{1x} \\ A_{1y} \end{pmatrix} \quad / \quad (III.22)$$

$$L = \begin{pmatrix} B_{1x} - A_{1x} & E_{1x} - A_{1x} \\ B_{1y} - A_{1y} & E_{1y} - A_{1y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{0x} - A_{0x} & E_{0x} - A_{0x} \\ B_{0y} - A_{0y} & E_{0y} - A_{0y} \end{pmatrix}^{-1}$$

Entonces, podemos definir el mapa de Poincaré en la región del plano V_1 , a la izquierda de $\Psi_1(L_1)$, (región V'_1) como:

$$p : V'_1 \rightarrow V'_1 \quad p(x_1) = \begin{cases} p_1^{-1} f p_0 f^{-1}(x_1) & \forall x_1 \in \angle A_1 B_1 E_1 \\ f p_0 f^{-1} p_1^{-1}(x_1) & \forall x_1 \in V'_1 - \angle A_1 B_1 E_1 \end{cases} \quad (III.23)$$

Considerando las siguientes transformaciones de rectas y puntos, en la figura III.4 se observa la imagen de los principales puntos del ángulo $A_1 B_1 E_1$ a través de la función $f p_0 f^{-1}$:

$$\begin{aligned} C_1 B_1 &= f p_0 f^{-1}(\overline{A_1 B_1}) = f p_0(\overline{A_0 B_0}) & F_1 C_1 &= f p_0 f^{-1}(\overline{F_1 E_1}) = f p_0(\overline{F_0 E_0}) \\ C_1 \hat{A}_{1+} &= f p_0 f^{-1}(\overline{A_1 A_{1+}}) = f p_0(\overline{A_0 A_{0+}}) & C_1 E'_{1+} &= f p_0 f^{-1}(\overline{E_1 E_{1+}}) = f p_0(\overline{E_0 E_{0+}}) \\ E_1 \hat{A}_1 &= p_1(E_1 A_1) & C_1 &= f(C_0) = \Psi_1(C) \end{aligned}$$

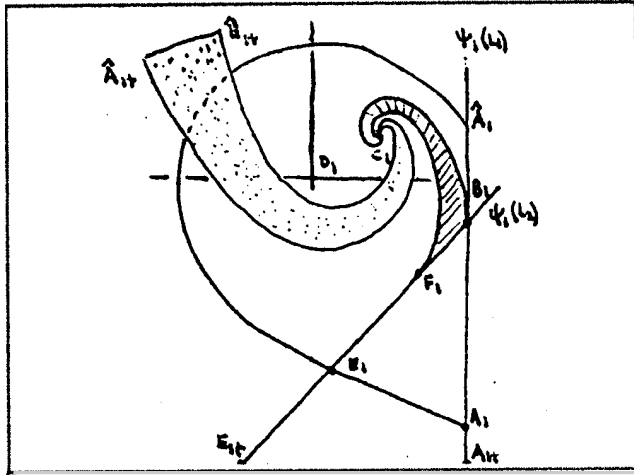


FIG.III.4: Imagen de los principales elementos de V_0 en V_1 .

La región S_a (rayada) muestra la imagen a través de $f p_0 f^{-1}$, de aquellos puntos del espacio (x, y, z) que entraron a la región D_0 por encima de $E^S(P_0)$. Y esa imagen, pertenece a la puerta de entrada superior, como se señalaba en la sección 2.2. La región punteada S_b , corresponde a la imagen de los puntos del espacio (x, y, z) que, habiendo entrado a D_0 por debajo del plano $E^S(P_0)$, inciden en U_1 . Como se observó en la sección 2.2, esta región corresponde a la puerta de entrada inferior.

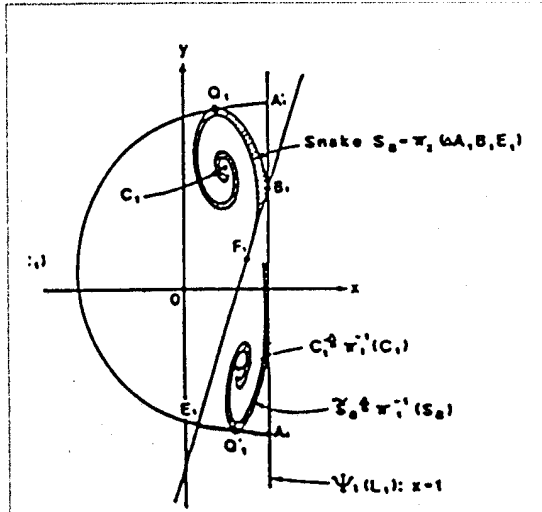


FIG. III.5.a: Nacimiento del Doble Scroll en el mapa de Poincaré [1].

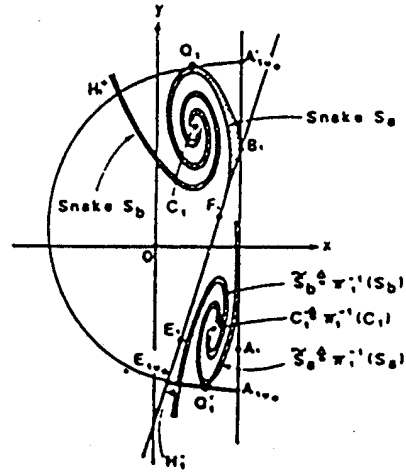


FIG. III.5.b: Muerte del Doble Scroll en el mapa de Poincaré [1].

En la figura III.5a se muestra el Nacimiento del Doble Scroll a través del mapa de Poincaré. La región $\tilde{S}_a = p_1^{-1}(S_a)$ es la imagen del triángulo $A_1B_1E_1$ a través del mapa p y está bien definida siempre que el punto D_1 (de coordenadas $(0,0,0)$ en V_1) permanezca a la izquierda de la puerta de entrada superior, como se señalaba en la sección anterior. Antes de producirse el Nacimiento del Doble Scroll la región $\tilde{S}_a$ está totalmente contenida en el interior del triángulo $A_1B_1E_1$. Si fijamos los valores de los parámetros a, b y aumentamos a , la región aumentará de tamaño hasta hacerse tangente a la recta E_1A_1 (en el punto $\tilde{Q}_1$). Este es el momento en que se produce el Nacimiento del Doble Scroll: Un posterior aumento en el valor del parámetro determinará ya no el crecimiento de la región S_a , sino la aparición de la región S_b .

En el otro extremo, tenemos la Muerte del Doble Scroll (fig.III.5b). Como ya habíamos dicho en el capítulo 2, el atractor se ve rodeado de un ciclo límite que intersecta al plano U_1 en los puntos J^+ y J^- (puntos de pasaje del ciclo desde D_0 a D_1 y viceversa). Su proyección sobre V_1 serán respectivamente: $J_1^+ = \Psi_1(J^+)$ y $J_1^- = \Psi_1(J^-)$. Se trata de puntos fijos para el mapa de Poincaré p y verifican: $p_1(J_1^\pm) = J_1^\pm$. Si se aumenta el valor del parámetro a , fijando el valor de los otros parámetros, la región $\tilde{S}_b = p_1^{-1}(S_b)$ (imagen a través del mapa de Poincaré de los puntos del ángulo $A_1+B_1E_1$ que no están en el triángulo $A_1B_1E_1$), va aumentando hasta que $J_1^- \in \tilde{S}_b$. Esto provoca la muerte del Doble Scroll, dado que sucesivas aplicaciones del mapa a los puntos de la región verificarán: $\lim_{n \rightarrow \infty} p^n(x_1) = J_1^-$.

APENDICE IV.
BIFURCACIONES HOMOCLÍNICAS [4,19,25].

Una órbita homoclínica es una trayectoria j que conecta la variedad estable e inestable de un punto de equilibrio tipo silla (por ejemplo P_0 , en el sistema (1.1)). Más formalmente:

$$j(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} P_0 \quad j(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} P_0 \quad (IV.1)$$

En la figura IV.1 se dibujan dos tipos de órbitas homoclínicas posibles en un sistema dinámico de tres dimensiones, cuando los autovalores de la matriz jacobiana evaluada en P_0 son reales, siendo dos de ellos negativos (fig.IV.1a) y cuando dos de los autovalores de la matriz jacobiana son complejos.

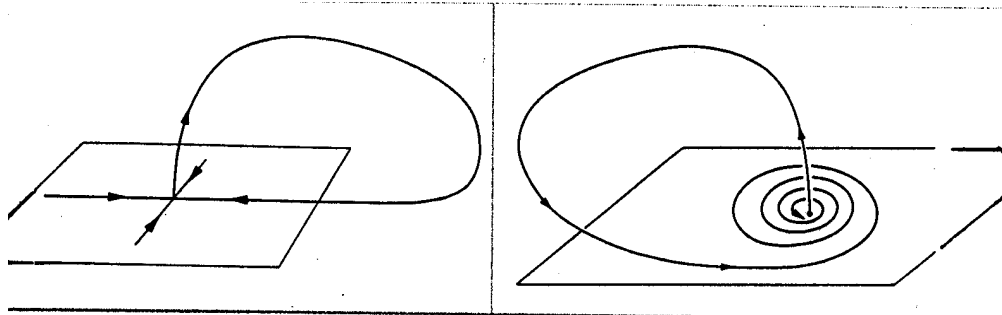


FIG. IV.1a : Órbita homoclínica para un punto silla.

FIG. IV.1b : Órbita homoclínica para un punto silla - foco.

En este apéndice nos proponemos estudiar los diferentes cambios que sufre un sistema dinámico general de tres dimensiones, cuando se varía el valor de un parámetro de control, a partir de un valor crítico para el cual se produce la órbita homoclínica. Estos cambios constituyen la bifurcación homoclínica. En particular, detallaremos el análisis en el caso en que la órbita homoclínica sea de tipo Shilnicov (alrededor de un punto silla-foco). Como el análisis para otros casos que no verifican la condición de Shilnicov, pero que también se dan en el sistema (1.1), es de similares características, al final del apéndice resumiremos las diferentes bifurcaciones homoclínicas que puede sufrir el sistema.

IV.1. HOMOCLÍNICAS DE SHILNICOV.

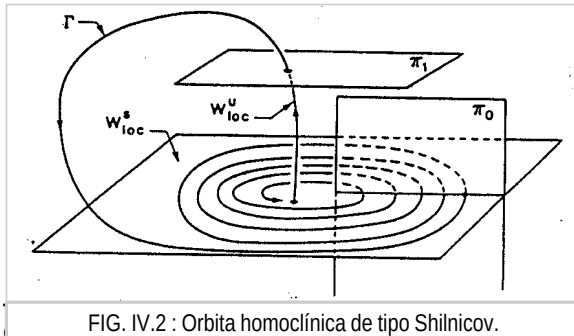


FIG. IV.2 : Órbita homoclínica de tipo Shilnicov.

En la figura IV.2 se esquematiza nuevamente el comportamiento de una órbita homoclínica alrededor de un punto silla-foco. En particular, la órbita dibujada une la variedad inestable del punto fijo, dada por la recta w , con la variedad estable del mismo punto, dada por el plano (u,v) ⁶³. Idénticas conclusiones se lograrán trabajando con un punto de tipo silla foco que verifique tener por variedad estable una recta y por variedad inestable un plano, Chua. En las condiciones observadas el sistema de la

figura IV.2, puede describirse cerca del punto fijo, a través de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= s_0 u - w_0 v + P(u, v, w) \\ \dot{v} &= w_0 u + s_0 v + Q(u, v, w) \\ \dot{w} &= l_0 w + R(u, v, w) \end{aligned} \quad (IV.2)$$

donde los términos P , Q y R representan los términos no lineales del sistema. Entonces, cerca del punto fijo, que tomaremos como origen de nuestro análisis, la solución del sistema de ecuaciones es de la forma:

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{s_0 t} (u_0 \cos(w_0 t) - v_0 \sin(w_0 t)) \\ v(t) &= e^{s_0 t} (u_0 \sin(w_0 t) + v_0 \cos(w_0 t)) \\ w(t) &= w_0 e^{l_0 t} \end{aligned} \quad (IV.3)$$

⁶³Supondremos que los autovalores verifican: $w \Rightarrow l_0 > 0$, $(u,v) \Rightarrow l_{12} = s_0 \pm iw_0 / s_0 < 0$

IV.1.1. DEFINICIÓN DE UN MAPA LINEAL.

Si definimos dos planos: p_0 perpendicular al plano propio (u,v) definido por los autovalores complejos y p_1 perpendicular a la recta (w) definida por el valor propio real positivo:

$$p_0 = \left\{ (u, v, w) / v=0, e^{\frac{2p s_0}{w_0}} \leq u \leq e, 0 < w \leq e \right\} \quad p_1 = \{(u, v, w) / w=e\} \quad (\text{IV.4})$$

con e suficientemente pequeño para garantizar que estamos en un entorno de P_0 y que el punto $(u,0,w) \in p_0$ sea único, podemos definir un mapa lineal entre los planos p_0 y p_1 :

$$P_0^L: p_0 \rightarrow p_1 \quad \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ w \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u \left(\frac{e}{w} \right)^{\frac{s_0}{l_0}} \cos \left(\frac{w_0}{l_0} \text{Ln} \left(\frac{e}{w} \right) \right) \\ u \left(\frac{e}{w} \right)^{\frac{s_0}{l_0}} \text{sen} \left(\frac{w_0}{l_0} \text{Ln} \left(\frac{e}{w} \right) \right) \\ e \end{pmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

Además, construiremos un mapa lineal de retorno: $P_1^L: U \subset p_1 \rightarrow p_0$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} / u_0 = \frac{1+e^{\frac{2p s_0}{w_0}}}{2} e \quad (\text{IV.6})$$

Entonces, el mapa lineal que lleva los puntos contenidos en un entorno de u_0 en p_0 (que llamaremos V) al mismo plano, será: $P^L: V \subset p_0 \rightarrow p_0$.

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \left(\frac{e}{w} \right)^{\frac{s_0}{l_0}} \left[a \cos \left(\frac{w_0}{l_0} \text{Ln} \left(\frac{e}{w} \right) \right) + b \text{sen} \left(\frac{w_0}{l_0} \text{Ln} \left(\frac{e}{w} \right) \right) + x_0 \right] \\ u \left(\frac{e}{w} \right)^{\frac{s_0}{l_0}} \left[c \cos \left(\frac{w_0}{l_0} \text{Ln} \left(\frac{e}{w} \right) \right) + d \text{sen} \left(\frac{w_0}{l_0} \text{Ln} \left(\frac{e}{w} \right) \right) + x_0 \right] \end{pmatrix} \quad (\text{IV.7})$$

Para tener en cuenta, la influencia de un parámetro $m = a - a_H$ (siendo a_H el valor del parámetro para el cual se produce la órbita homoclínica si b permanece constante) consideraremos el mapa:

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J u w^d \cos(x \text{Ln} w + \Phi_1) + em + u_0 \\ r u w^d \cos(x \text{Ln} w + \Phi_2) + m \end{pmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

donde:

$$\begin{aligned} d &= -\frac{s_0}{l_0} & p &= \sqrt{a^2 + b^2} & f_1 &= \text{tg}^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) \\ x &= -\frac{w_0}{l_0} & q &= \sqrt{c^2 + d^2} & f_2 &= \text{tg}^{-1} \left(\frac{d}{c} \right) \\ J &= p e^{-d} & \Phi_1 &= \frac{w_0}{l_0} \text{Ln} e + f_1 \\ r &= q e^{-d} & \Phi_2 &= \frac{w_0}{l_0} \text{Ln} e + f_2 \end{aligned}$$

IV.1.2. PUNTOS FIJOS DEL MAPA.

Analizaremos los puntos fijos del mapa definido en (IV.8) puesto que ellos representarán órbitas periódicas en el espacio definido por la ecuación (IV.3).

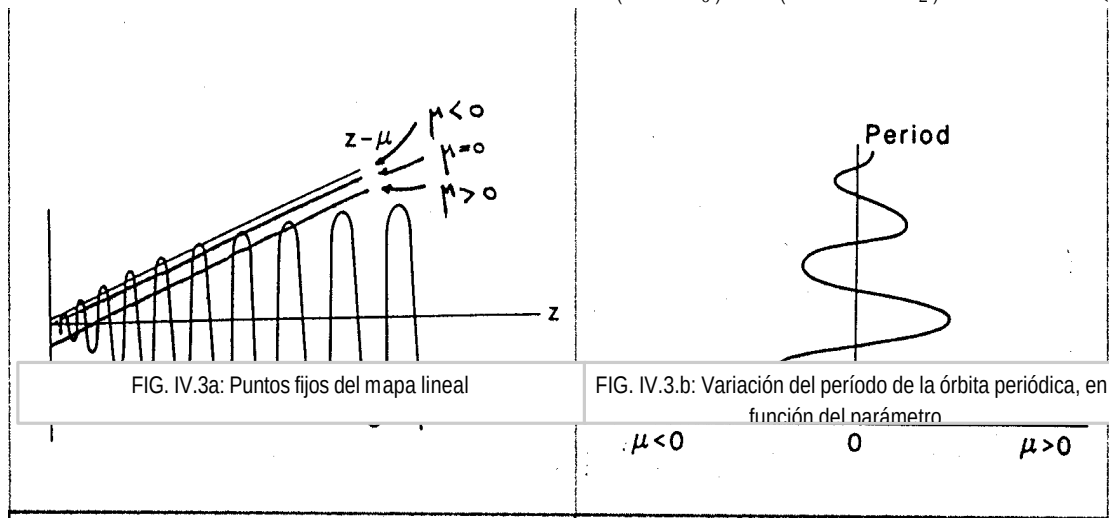
Entonces, la ecuación que calcula estos punto fijo ($P^L(u) = u$) puede escribirse como:

$$(w - m) \left[1 - J w^d \cos(x \text{Ln} w + \Phi_1) \right] = r w^d (em + u_0) \cos(x \text{Ln} w + \Phi_2) \quad (\text{IV.9})$$

En particular, nos interesa ver en detalle qué sucede cuando el autovalor real es mayor que el módulo de la parte real de los autovalores complejos: $d < 1$, la cual constituye la condición de Shilnicov.

En estas condiciones $w^d \ll 1$, puesto que w es muy pequeño, y la ecuación puede aproximarse por la curva que se grafica en la figura IV.3a :

$$w - m = r w^d (em + u_0) \cos(x \text{Ln} w + \Phi_2) \quad (\text{IV.10})$$



Se observa, entonces, que cuando $m = 0$ existe un número infinito contable de puntos fijos, mientras que cuando $m > 0$ y $m < 0$ existe un número finito de puntos fijos para este mapa.

Dichos puntos fijos representan órbitas periódicas, cuyo período va creciendo a medida que el punto fijo w^* se sitúa cerca del origen. Eso se debe basicamente a que el tiempo que tarde la órbita en ir desde V hasta U está dado por:

$$t_e = \frac{1}{l_0} \text{Ln} \left(\frac{e}{w^*} \right) \quad (\text{IV.11})$$

En el esquema de la figura IV.3b se observa que a medida que el parámetro m se aproxima a su valor nulo, van apareciendo mayor cantidad de puntos fijos, representantes de órbitas periódicas con mayor período.

IV.1.3. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD.

El problema de la estabilidad de las órbitas periódicas puede estudiarse, observando los autovalores de la matriz jacobiana del mapa lineal (IV.8), evaluada en los puntos fijos (u^*, w^*):

$$J(u^*, w^*) = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix} \quad (\text{IV.12})$$

donde:

$$\begin{aligned}
A &= J w^{*d} \cos(x \operatorname{Ln} w^* + \Phi_1) \\
B &= r u^* w^{*d-1} [d \cos(x \operatorname{Ln} w^* + \Phi_2) - x \sin(x \operatorname{Ln} w^* + \Phi_2)] \\
C &= J u^* w^{*d-1} [d \cos(x \operatorname{Ln} w^* + \Phi_2) - x \sin(x \operatorname{Ln} w^* + \Phi_1)] \\
D &= r w^{*d} \cos(x \operatorname{Ln} w^* + \Phi_2)
\end{aligned}$$

$$l_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(A + B) \pm \sqrt{(A + B)^2 - 4(AB - CD)} \right] \quad (\text{IV.13})$$

Lo primero que se observa es que el determinante de la matriz (IV.12) es de orden $(2d - 1)$ en w^* , por lo que debemos distinguir dos casos⁶⁴:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} < d < 1 &\Rightarrow w^{*2d-1} \langle \langle 1 \quad \text{cuando } w^* \langle \langle 1 \\
0 < d < \frac{1}{2} &\Rightarrow w^{*2d-1} \rangle \rangle 1 \quad \text{cuando } w^* \langle \langle 1
\end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

Cuando el punto fijo w^* está próximo a uno de los ceros de la curva de la figura IV.3a, se cumple que $D = 0$ y por lo tanto el punto fijo y su órbita periódica asociada, son de tipo silla:

$$\begin{aligned}
l_1 &= A \propto w^{*d} \xrightarrow{w \langle \langle 1} |l_1| < 1 \\
l_2 &= B \propto w^{*d-1} \xrightarrow{w \langle \langle 1} |l_2| > 1
\end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

Cuando el punto fijo w^* está próximo a uno de los máximos de la curva de la figura IV.3a se verifica que $B = 0$, lo cual implica que el punto fijo y su órbita asociada son, en el primer caso de tipo estable y en el segundo caso de tipo inestable:

$$\begin{aligned}
l_{1,2} &= A \pm \sqrt{A^2 + 4CD} \quad \frac{A^2}{CD} \propto w^* \langle \langle 1 \quad l_{1,2} = \pm 2\sqrt{CD} \\
\sqrt{CD} \propto w^{*d-\frac{1}{2}} &\xrightarrow{w \langle \langle 1} \begin{aligned} d > \frac{1}{2} &\Rightarrow |l_{1,2}| < 1 \\ d < \frac{1}{2} &\Rightarrow |l_{1,2}| > 1 \end{aligned}
\end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

Basándonos en estos casos particulares, analizaremos qué sucede con la estabilidad, para distintos valores de m , como se muestra en la figura IV.4a y construiremos la figura IV.4b, la cual nos da toda la información sobre la estabilidad de las órbitas periódica, en función del parámetro y el valor de su período. Trataremos de describir esta figura, comenzando desde un valor negativo de m y recorriendo la curva, llamada wiggle, de arriba hacia abajo, o sea disminuyendo el período de las órbitas resultantes.

⁶⁴ La condición $d = \frac{1}{2}$ está dada, en el sistema (1.1), por la condición de resonancia S_4 , por lo que los casos que se estudiarán corresponden a la órbita homoclínica principal cuando ésta se observa para valores de los parámetros a y b a la izquierda y derecha de S_4 , resp, en la figura 4.1.

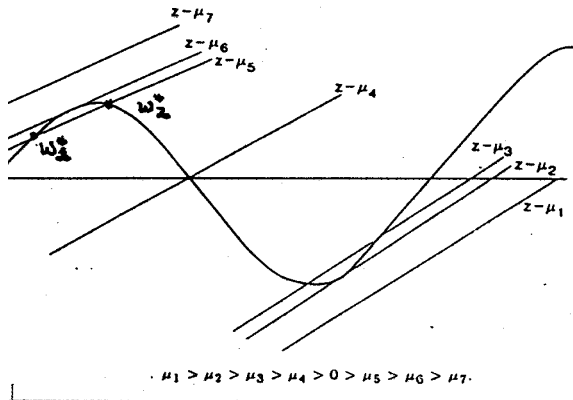


FIG. IV.4a: Posición de los puntos fijos de acuerdo a cómo varía el parámetro.

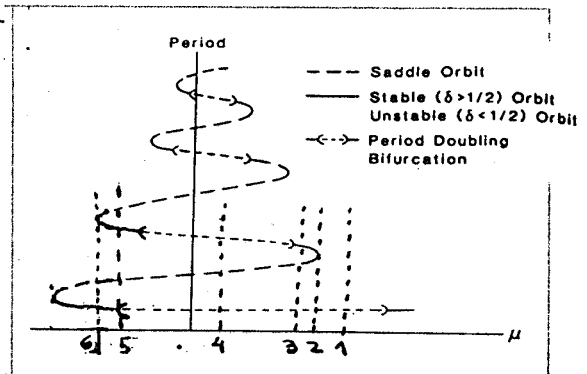


FIG. IV.4b: Estabilidad de los puntos fijos, al variar el parámetro y el período de la órbita.

Para $m = m_7$ los posibles puntos fijos estarían a la derecha de la gráfica IV.4a, por lo que su período sería menor y no aparecen los puntos fijos en la figura IV.4b.

Para $m = m_6$ se produce una bifurcación nodo-silla con el consecuente surgimiento de un punto estable o totalmente inestable y otro punto de tipo silla. En este momento se produce la bifurcación tangente: la derivada del término de la derecha en la ecuación (IV.10), evaluada en el punto fijo es 1.

Para $m = m_5$ se observan ambos puntos fijos: w_2^* es un punto estable (inestable) ya que se encuentra próximo al máximo de la función y entonces, w_1^* es el punto silla (más próximo a $w = 0$ y por lo tanto de mayor período).

Para $m = m_4$, la curva pasa por un cero en la figura IV.4a, y por lo tanto existe un punto silla en la rama del wiggle donde antes había un punto fijo estable (inestable). Para que esto suceda, el punto estable (inestable) de $m = m_5$, tuvo que haber sufrido una duplicación de período, para algún valor del parámetro entre m_5 y m_4 : la pendiente del mapa, evaluada en el punto fijo pasó por -1.

Entre m_4 y m_3 , se produce una duplicación de período inversa, con el consecuente surgimiento de una órbita estable (inestable), cuyo punto fijo está próximo a un mínimo de la curva, cuando $m = m_3$.

Cuando $m = m_2$ se produce una bifurcación nodo-silla inversa, por lo que desaparecen los puntos estable y silla, que estabamos observando, permaneciendo otros puntos fijos, a la derecha de la figura IV.4a y por lo tanto de período menor.

Entonces, puede observarse que la órbita homoclínica ($T \rightarrow \infty$) coexiste para el valor crítico del parámetro, con infinitas órbitas periódicas tipo silla. Mientras que si nos apartamos del valor crítico del parámetro, persiste un número finito de órbitas periódicas tipo silla o estables (inestables). Las ventanas de estabilidad de estas últimas van siendo cada vez más estrechas, a medida que nos acercamos a la órbita homoclínica principal.

IV.2. OTROS CASOS DE INTERES.

Siguiendo un razonamiento similar al desarrollado de la sección anterior, podemos determinar mapas lineales (equivalentes al IV.10) cerca del origen, aún cuando no se verifique la condición de Shilnicov (o sea cuando $d > 1$) o cuando el punto de equilibrio es de tipo silla (es decir que los autovalores de la matriz jacobiana son reales de distinto signo)⁶⁵.

Analizaremos primero el caso de autovalores reales, cuyos posibles mapas se dibujan en la figura IV.5. Si bien los mapas son diferentes según sea la relación entre los autovalores, todos ellos, a diferencia de lo que sucedía para el sistema analizado en el capítulo anterior, tienen un único punto fijo (representante de una órbita periódica) que se observa o bien cuando el valor del parámetro de control crece (primero, segundo y cuarto caso) o bien cuando el valor del parámetro de control decrece (tercer caso).

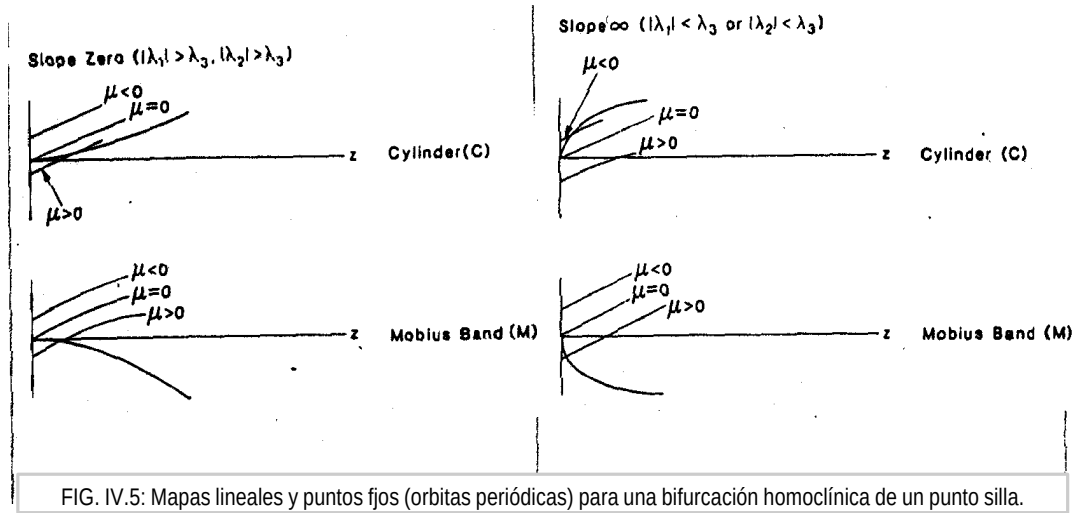


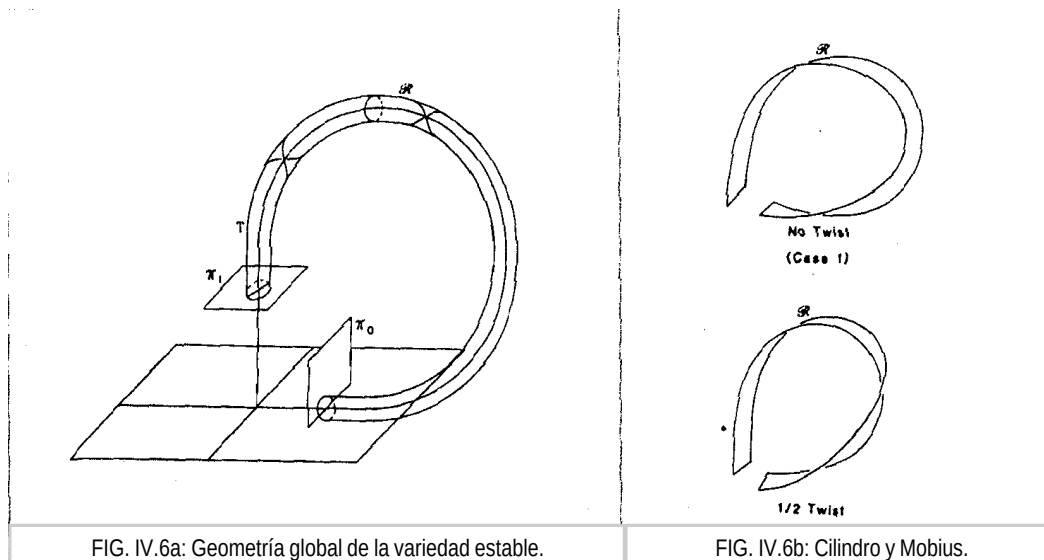
FIG. IV.5: Mapas lineales y puntos fijos (órbitas periódicas) para una bifurcación homoclínica de un punto silla.

Se observa, también que para una misma relación entre los autovalores, existen dos tipos de mapa: "Cilindro" y "Mobius". No es nuestro propósito ahondar en los detalles de esta diferencia; simplemente diremos que en el primer caso, un cilindro que contenga a la variedad estable de la órbita homoclínica (aquella que lleva desde el plano p_1 al plano p_0 de la figura IV.6a) en el espacio $\mathbb{R}^3$ no sufre "retorcimiento" o sufre un número par de "retorcimientos", mientras que en el segundo caso, el cilindro sufre un número impar de "retorcimientos" por lo que es homeomorfo a una cinta de Mobius, como se esquematiza en la figura IV.6b. El comportamiento de la estabilidad del único ciclo que se genera en todos los casos, viene dado por el siguiente esquema:

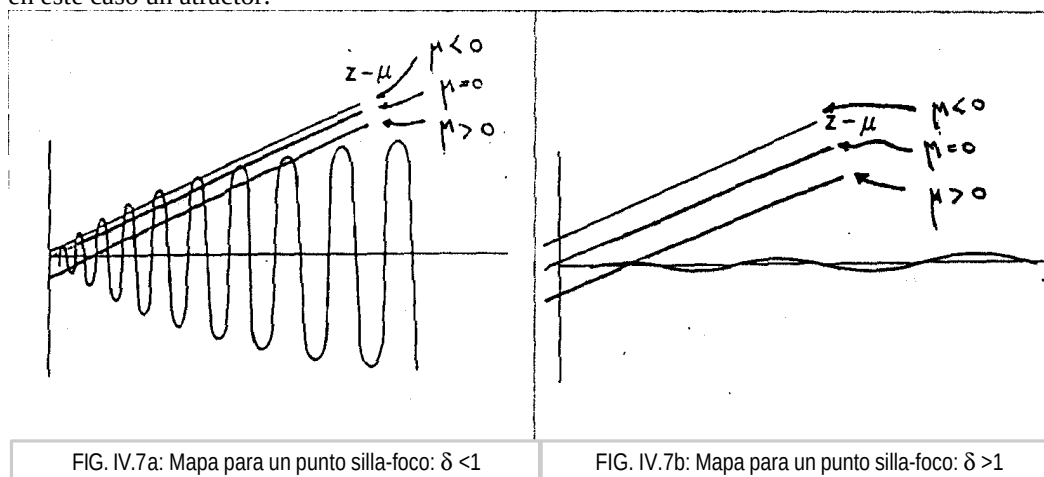
$$\begin{array}{l} |l_1|, |l_2| < l_3 \rightarrow \text{estable} \\ |l_1 + l_2| > l_3, |l_{12}| < l_3 \rightarrow \text{silla} \\ |l_1 + l_2| < l_3 \rightarrow \text{inestable} \end{array}$$

⁶⁵Supondremos la siguiente relación entre los autovalores:

$$l_1 < 0, l_2 < 0 \quad l_{12} = \max(l_1, l_2) \\ l_3 > 0$$



Por otro lado, en la figura IV.7 se observa el comportamiento del mapa lineal, para el caso en que el punto fijo tenga dos autovalores complejos, cumpliéndose o no la condición de Shilnicov. La condición $d = 1$, entonces, marca una frontera entre dos comportamientos bien distintos: obsérvese que cuando el módulo de la parte real de los autovalores complejos es mayor que el módulo del autovalor real, para valores del parámetro mayores que el valor crítico, surge un único ciclo estable. La órbita homoclínica es, en este caso un atractor.



BIBLIOGRAFIA.

- [1] L.O.Chua, M.Komuro, T.Matsumoto, "The Double Scroll family", IEEE, CAS V.33, N.11, p.1073 (1986).
- [2] L.P.Sil'nikov, "Chua's Circuit: Rigorous results and future problems", Int. J. Bifurcation and Chaos, V.4, N.3, p.489 (1994)
- [3] O.E.Rössler, "Continuous chaos-Four prototype equations", Ann. N.Y. Acad. Sci. V.31, p.376 (1979).
- [4] P.Glendinning, C.Sparrow, "Local and global behavior near homoclinic orbits", J.Stat.Phys., V.35, N.5/6, p.645 (1984).
- [5] P.Gaspard, G.Nicolis, "What can we learn from homoclinic orbits in chaotic dynamics?", J.Stat.Phys. V31, N.3, p.499 (1983).
- [6] P.Gaspard, R.Kapral, G.Nicolis, "Bifurcation phenomena near homoclinic systems: A two-parameter analysis", J.Stat.Phys., V.35, N.5/6, p.697 (1984).
- [7] T.Matsumoto, L.O.Chua, M.Komuro, "Birth and death of the Double Scroll", Physica 24D, p.97 (1987).
- [8] A.I.Khibnik, D.Roose, L.O.Chua, "On periodic orbits and homoclinic bifurcations in Chua's Circuit with smooth nonlinearity", Int. J. Bifurcation and Chaos, V.3, N.2, p.363 (1993)
- [9] S.Wu, "Chua's Circuit family", IEEE, Proceedings, p.1022 (1987).
- [10] T.Matsumoto, "Chaos in electronic circuits", IEEE, Proceedings, p.1033 (1987).
- [11] L.M.Pecora, T.L.Carroll, "Driving systems with chaotic signals", Phys.Rev.A, V.44, N.4, p.2374 (1991).
- [12] V.S.Anishchenko, T.E.Vadivosa, D.E. Postnov, M.A.Safonova, "Synchronization of chaos", Int. J. Bifurcation and Chaos, V.2, p.633 (1992).
- [13] L.Kocarev, K.Eckart, L.O.Chua, U.Parlitz, "Experimental demonstration of secure communications via chaotic synchronization", Int. J. Bifurcation and Chaos, V.2, p.705 (1992).
- [14] E.J.Altman, "Normal form analysis of Chua's Circuit with applications for trajectory recognition", IEEE, CAS V.40, N.10, p.675 (1993).
- [15] J.Carr, "Applications of Center Manifold Theory" (Springer-Verlag) (1981).
- [16] X.Rodet, "Models of musical instruments for Chua's with time delay", IEEE, CAS V.40, N.10, p.696 (1993).
- [17] J.M.Cruz, L.O.Chua, "An IC chip of Chua's Circuit", IEEE, CAS V.40, N.10, p.614 (1993).
- [18] A.C. Sicardi, S.Kahan, "Stable and unstable manifolds of fixed points for Chua's Circuit with smooth nonlinearity", 9na Conferencia MEDYFINOL, Bariloche, Argentina.
- [19] S.Wiggins, "Global Bifurcations and Chaos" (Springer-Verlag) (1988).
- [20] E.Freire, A.J.Rodríguez-Luis, E.Gamero, E.Ponce, "A case study for homoclinic chaos in an autonomous electronic circuit", Physica D. V.62, p.230 (1993).
- [21] S.Fraser, R.Kapral, "Analysis of flow hysteresis by a one-dimensional map", Phys. Rev. A, V.25, N.6, p.3223 (1982).
- [22] M.J.Feigenbaum, "Quantitative universality for a class of nonlinear transformations", J. Stat. Phys., V.19, p.25 (1978).
- [23] E.N.Lorenz, "Deterministic non periodic flow", J. Atmos. Sci., V.20, p.130 (1963).
- [24] A.Arneodo, P.Coullet, C.Tresser, "Oscillators with Chaotic Behavior: An illustration of the theorem by Sil'nikov". J. Stat Phys. V.27, p.171 (1982).
- [25] J.Guckenheimer and P.Holmes, "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields" (Springer-Verlag) (1983).
- [26] J.D.Crawford, "Introduction to bifurcation theory", Rev. Mod. Phys., V.63, N.4, p.991 (1991).
- [27] P.Manneville, "Dissipative Structures and Weak Turbulence" (Academic Press) (1990).
- [28] A.N.Sârkovskii, "Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself", Ukr. Math., V.16, p.16 (1964).